BHS III 74-1

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke * Aktiengesellschaft *
Bibliothek:
Gruppe: III
Nr. 74

Industrielle

Mechanik.

Nach

Poncelet

deutsch bearbeitet

und mit Anmerkungen begleitet

von

Anton Hallbauer,
Lehrer der Mechanik an der kgl. Gewerbschule zu Zittau.

I. Theil.

Fundamentalsätze. Statik und Dynamik.

Mit 11 Kupfertafeln.

Nürnberg 1845.
Verlag von August Recknagel.

BIBLIOTHEK
DER K.B.GENERAL
BERGW.U.SALINEN
ADMINISTR.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Einer Aufforderung der Verlagshandlung nachgebend, habe ich mich der Bearbeitung des vorliegenden I. Theils der „Industriellen Mechanik“ unterzogen, nachdem der ganze II. Theil und die ersten 6 Bogen des I. Theils von dem nunmehr verstorbenen Professor Kuppler schon bearbeitet und resp. herausgegeben worden waren. Da dieser I. Theil mit dem bereits erschienenen II. Theile ein Zusammengehöriges zu bilden bestimmt war, so mußte mein ganzes Bestreben darauf gerichtet seyn, im Sinne des mit Tod abgegangenen Professor Kuppler fortzuarbeiten. In wie weit mir dies gelungen sey, bleibe der Beurtheilung des geehrten Lesers überlassen.

Zittau im Juli 1845.

A. Hallbauer.

Inhalts-Verzeichniß.

Erste Abtheilung.

I.

Allgemeine Begriffe über die Beschaffenheit und die physischen Eigenschaften der Körper.

Paragraph		Seite
1.	Hauptzustände der Körper	1
2.	Theilbarkeit der Körper	5
3.	Porosität der Körper	8
4.	Compressibilität und Elasticität der Körper . .	10
5.	Ausdehnbarkeit der Körper. Begriffe über die Wärme und über die innere Beschaffenheit der Körper .	16
6.	Von der Schwere und deren Wirkungen . .	21

II.

Vorläufige Begriffe über die Bewegung, die Kräfte und deren Wirkungen.

7.	Raum	33
8.	Zeit und Maß derselben	—
10.	Bewegung	35
11.	Verschiedene Arten der Bewegung . . .	—
12.	Geschwindigkeit	36
13.	Gleichförmige Bewegung	37
14.	Maß der gleichförmigen Geschwindigkeit . .	—
15.	Periodische Bewegung, mittlere Geschwindigkeit .	38
16.	Geometrische Darstellung der Bewegungsgesetze .	39
17.	Trägheit der Materie	43
18.	Kräfte	44
19.	Verschiedene Wirkungen der Kräfte . . .	45
20.	Natur und Vergleichung der Kräfte . . .	46

Paragraph		Seite
21.	Messung der Kräfte durch die Gewichte . .	47
22.	Bemerkung über die Schwere	48

III.

Wirkungsweise der Kräfte. — Gleichgewicht. — Arbeit.

23.	Direkte Wirkung der Kräfte	50
24.	Princip der Rückwirkung	51
25.	Jeder Punkt in der Richtung der Kräfte kann als ihr Angriffspunct angenommen werden . .	52
26.	In den meisten Fällen, wo mittelst eines Körpers eine Kraft auf eine andere Stelle übergetragen wird, kann man jenen als vollkommen starr betrachten	53
27.	Die Trägheit der Materie kann mittelst einer Kraft gemessen werden	—
28.	Angriffspuncte, Richtungen und Intensitäten der Kräfte	55
29.	Geometrische Darstellung der Kräfte . . .	—
30.	Gleichgewicht der Kräfte	56
31.	Einfluß der Trägheit auf den Zustand des Gleichgewichts	—
32.	Seiten- und Mittelkräfte	57
33.	Gleichgewicht und Mittelkraft solcher Kräfte, deren Richtungen mit einer und derselben Geraden zusammenfallen	58
34.	Erklärung der mechanischen Arbeit der Kräfte .	59
35.	Maß der Arbeit, wenn der Widerstand constant ist .	60
36.	„ „ „ „ „ „ veränderlich ist	62
37.	Mittelwerth der veränderlichen Widerstände . .	68
38.	Beispiele von mechanischer Arbeit . . .	70
39.	Unterscheidung zwischen der mechanischen Arbeit der Kraft und derjenigen des nützlichen Widerstandes; Nutzeffect	—
40.	Gegenseitige Abhängigkeit gewisser mechanischer Arbeiten	71
41.	Begriff der mechanischen Arbeit . . .	72
42.	Die vertikale Erhebung einer Last stellt das Maß einer geleisteten mechanischen Arbeit vor . . .	—

Paragraph Seite

43. Vorgeschlagene Benennungen für das Maß der mechanischen Arbeit 74
44. Die Arbeit der Kräfte in Zahlen auszudrücken . 75
45. Die verschiedenen, für die Arbeit einer Kraft vorgeschlagenen Benennungen 76
46. Fehlerhafte Annahme des Ausdruckes der Arbeit . 79
47. Jede Kraftäußerung erzeugt einen gewissen Effect, eine Arbeit 80
48. Unter Umständen kann diese Arbeit unbeachtet gelassen werden 81
49. Horizontale Fortschaffung der Lasten . . . 83
50. Durch Formveränderung der Körper kann der Nutzeffect sehr herabgezogen werden 84
51. Durch wiederholte Unterbrechungen der Wirksamkeit der Kräfte und durch Stöße entsteht Arbeitsverlust 85
52. Vernichtung und Wiederherstellung der mechanischen Arbeit durch Federn 86
53. Die Federkraft der Körper dient als Arbeitsreservoir 88
54. Erzeugung mechanischer Arbeit durch die Wärme . 89
55. „ „ „ „ „ Schwere . 91
55 a. Die Wiederherstellung der mechanischen Arbeit findet nicht mehr vollständig statt, wenn zugleich fremdartige Widerstände zu überwinden sind . . 92
56. Mechanische Arbeit der Trägheit der Körper . 95

IV.

Wirkung der zur Überwindung der Trägheit oder zur Bewegungsertheilung angewendeten bewegenden Kräfte. — Lebendige Kraft, Masse und Größe der Bewegung.

57. Constante Kräfte erzeugen gleichförmig veränderte Bewegungen 97
58. Gleichförmig beschleunigte Bewegung . . 99
59. „ verzögerte „ . . . 103
60. Senkrechte Fallbewegung 104

Paragraph		Seite
61.	Fall im luftleeren Raume. Wirkungsart der Schwere	106
62.	Gesetze des Falls im luftleeren Raume. . .	107
63.	Rechnungsbeispiele	109
64.	Vertikales Aufsteigen der Körper . . .	110
65.	Die der Fallgeschwindigkeit entsprechende mechanische Arbeit	111
66.	Die lebendige Kraft der Körper und ihre Beziehung zur mechanischen Arbeit	112
67.	Betrachtungen über die lebendige Kraft und die bewegenden Kräfte überhaupt	113
68.	Die Masse eines Körpers	114
69.	Die Größe der Bewegung eines Körpers . .	115
70.	Verhalten der bewegenden Kräfte zu den hervorgebrachten Bewegungen	—
71.	Maß der bewegenden und der Trägheit durch die ertheilte Geschwindigkeit und umgekehrt dieser durch jene	116
72.	Beziehung der bewegenden Kräfte zu den ertheilten Bewegungsgrößen	117
73.	Neues Mittel, die bewegenden Kräfte und die Trägheit zu messen	118
74.	Maß der Arbeit bewegender Kräfte und der Trägheit	120
75.	Relation zwischen der aufgewendeten Arbeit und der erlangten lebendigen Kraft	121
76.	Verwandlung mechanischer Arbeit in lebendige Kraft und umgekehrt	123
77.	Wiedererstattung und Vernichtung der lebendigen Kraft beim Stoße	124
78.	Betrachtungen über die Unmöglichkeit, durch Federn und durch die Trägheit eine gegebene Arbeitsgröße zu vermehren	125
79.	Untersuchung der periodischen Bewegung und Verhalten der Trägheit bei derselben	126
80.	Beispiele für periodische Bewegung . . .	127
81.	Antheil der Trägheit an verschiedenen industriellen Vorgängen	129

Zweite Abtheilung.

I.

Kräfte, deren Richtungslinien sich in einem Puncte schneiden.

Paragraph		Seite
1.	Gleichgewicht eines Körpers	131
2.	Resultante in gleicher Richtung wirkender Kräfte .	132
3.	Parallelogramm der Wege und Geschwindigkeiten .	—
4.	Krummlinige und veränderliche Bewegungen .	134
5.	Unabhängigkeit der einem Körper gleichzeitig ertheilten Geschwindigkeiten	135
6.	Jede der gleichzeitig angreifenden Kräfte wirkt unabhängig von den übrigen	136
7.	Parallelogramm der Kräfte	137
8.	Zerlegung einer Kraft in zwei andere . .	138
9.	Arbeitsgröße einer Kraft gegen einen Widerstand, welcher ihr nicht unmittelbar entgegengesetzt ist .	140
10.	Arbeitsgröße zur Bewegung eines schweren Körpers in einer Curve	142
11.	Die Arbeitsgröße der Mittelkraft zweier gleichzeitig wirkender Kräfte ist der algebraischen Summe der beiden Seitenkräfte gleich	143
12.	Moment der Mittelkraft zweier Seitenkräfte .	144
13.	Der Fall, wo zwei Kräfte verschiedene Angriffspuncte haben, läßt sich auf den der Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspuncte zurückführen . .	146
14.	Erweiterung des Lehrsatzes von den Momenten .	147
15.	„ „ „ „ „ Arbeitsgrößen .	—
16.	Für gewisse Fälle ist das Moment der Mittelkraft Null	150

II.

Parallele Kräfte.

17.	Verwandtschaft zwischen zwei zusammenlaufenden und zwei parallelen Kräften	151
18.	Mittelkraft zweier paralleler Kräfte . . .	152
19.	Moment zweier paralleler Kräfte in Bezug auf eine gerade Linie	154

Paragraph		Seite
20.	Moment zweier paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene	155
21.	Moment und Größe der Mittelkraft mehrerer paralleler Kräfte	—
22.	Bestimmung des Angriffspunctes der Mittelkraft mit Hülfe der Momente	156
23.	Mittelpunct der parallelen Kräfte	157
24.	Anwendung der Lehre von den Momenten auf die Schnellwage	158
25.	Mechanische Arbeit der Mittelkraft aus mehreren parallelen Seitenkräften	159

III.

Vom Schwerpuncte der Körper.

26.	Schwerpunct	160
27.	Mechanische Auffindung des Schwerpuncts der Körper	—
28.	Bestimmung des Schwerpuncts durch Rechnung und mit Hülfe der Geometrie	162
29.	Schwerpunct regelmäßiger Körper . . .	—
30.	„ symmetrischer Körper	163
31.	„ regelmäßiger, aus zwei ungleichartigen Theilen zusammengesetzter Körper	164
32.	„ solcher Körper, welche sich durch Parallelschnitte in congruente oder ähnliche Theile zerlegen lassen	165
33.	„ eines Parallelogramms	—
34.	„ „ Parallelepipedons	166
35.	„ „ Dreiecks	—
36.	„ „ beliebigen Vierecks . . .	167
37.	„ einer dreiseitigen Pyramide . . .	168
38.	„ „ vielseitigen Pyramide . .	169
39.	„ eines beliebigen Polyeders . .	—
40.	„ „ beliebig gestalteten Körpers .	170
41.	Anwendung der Lehre vom Schwerpuncte auf die Inhaltsbestimmung gewisser Flächen und Körper .	171
42.	Benutzung der Guldin'schen Regel zur Bestimmung der Schwerpunete von ebenen Flächen und Linien .	173

IV.

Progressive Bewegung eines Körpers oder eines Systems von Körpern. — Mechanische Arbeit der Schwere bei einer solchen Bewegung. — Verschiedene Arten des Gleichgewichts.

Paragraph — Seite

43. Trägheit eines Körpers oder eines Systems von Körpern bei progressiver Bewegung . . . 175
44. Ganze Bewegungsgröße eines Körpers . . 176
45. Bewegung eines Körpers, wenn die Richtung der bewegenden Kraft durch den Schwerpunct geht . 177
46. Bewegung eines Körpers, wenn die Richtung der bewegenden Kraft nicht durch den Schwerpunct geht . 178
47. Ganze lebendige Kraft eines parallel mit sich selbst bewegten Körpers 181
48. Allgemeiner Lehrsatz über die Arbeit der Schwere . 182
49. Gleichgewicht schwerer Körper 184
50. Beispiele für die verschiedenen Arten des Gleichgewichts 185

V.

Gleichgewicht und Bewegung eines festen, völlig freien Körpers.

51. Gleichgewicht eines freien Körpers . . . 189
52. Gleichgewicht und Bewegung der Maschinen . . 190
53. Relation zwischen der Arbeit der Kräfte, welche auf einen freien Körper wirken, und ihrer lebendigen Kraft 192
54. Beispiel . . . . . —

VI.

Bewegung eines Körpers um eine Axe.

55. Zur Drehung eines Körpers um eine Axe tragen nur die Arbeitsgrößen derjenigen Kräftecomponenten bei, welche in zur Axe normale Ebenen fallen . . 196
56. Mechanische Arbeit der Kräfte, welche einen Körper um eine Axe drehen. Gleichgewicht eines solchen Körpers 197

Paragraph Seite

57. Ausdehnung des Princips der lebendigen Kräfte auf die rotirende Bewegung 198
58. Verfahren zur Bestimmung der lebendigen Kraft eines Körpers, welcher sich um eine Axe dreht . . 199
59. Beschleunigung eines durch eine drehende Kraft in Bewegung gesetzten Körpers 200
60. Anwendung des Vorigen auf die Schwungräder . 201
61. Entfernung der Kraft der Trägheit von der Axe, um welche sich der Körper dreht . . . 203
62. Die Trägheitsmomente homogener Körper lassen sich auf die Rauminhalte ihrer Theile beziehen . . 204
63. Trägheitsmoment verschiedener Körper in Bezug auf ihre Volumina 205
64. Trägheitsmomente eines und desselben Körpers in Bezug auf zwei parallele Axen . . . 212
65. Anwendung der Trägheitsmomente auf Maschinen . 216

VII.

Centrifugalkraft.

66. Centrifugalkraft eines gleichförmig im Kreise bewegten Körpers von geringen Dimensionen . . 218
67. Centrifugalkraft eines Körpers von größern Abmessungen 221
68. Beispiele 224
69. Einfluß der Centrifugalkraft auf die Verhältnisse der Schwere an der Erdoberfläche und auf die abgeplattete Gestalt der Erde 227
70. Bewegung eines Körpers in einem vertikalen Kreise 228
71. Centrifugalkraft eines Körpers, welcher irgend eine Curve durchläuft. Anwendung auf die Bahn der Bomben 229

VIII.

Das Pendel. — Stoß eines Körpers, der sich eine Axe dreht.

72. Pendelbewegung 236
73. Schwingungszeit eines einfachen Pendels . . 237

Paragraph		Seite
74.	Zusammengesetztes Pendel	242
75.	Beziehung des zusammengesetzten Pendels zum einfachen Mittelpunct des Schwunges . . .	244
76.	Mittelpunct des Stoßes	247
77.	Stoß zweier Körper, von welchen der eine mit einer festen Axe verbunden ist	252
78.	Anwendung des Vorigen auf das ballistische Pendel .	254

IX.

Einfache Maschinen. — Gespannte Seile, Seilmaschinen, Kettenlinie.

78 a.	Einfache Maschinen	257
79.	Gleichgewicht eines an beiden Enden gezogenen Seils und Spannung desselben	—
80.	Arbeitsgröße der Kräfte an einem Seile . .	258
81.	Gleichgewicht zwischen Seilen, welche in einem Puncte zusammenlaufen	259
82.	Gleichgewicht eines Seilpolygons . . .	261
83.	„ „ „ , an welchem parallele Kräfte oder Gewichte wirken . . .	262
84.	Spannung in den Seiten des Seilpolygons .	264
85.	Die Kettenlinie und ihre Anwendung . .	265
86.	Eigenschaften der Kettenlinie und Construction derselben	266
87.	Ähnliche Kettenlinien	268
88.	Bestimmung des Punctes, in welchem die den Spannungen entsprechenden Linien zusammenlaufen .	269
89.	Spannung in einem beliebigen Puncte der Kettenlinie	271
90.	Spannungen der Endpuncte einer Kettenlinie, wenn die Senkung des Scheitels sehr gering ist . .	272
91.	Kettenbrücken, bei welchen die Brückenbahn durch vertikale Tragstangen an die Ketten gehängt ist .	274

X.

Stabilität. Schiefe Ebene. Reibung gleitender Körper. Seilesreibung. Keil.

92.	Gleichgewicht eines Körpers, welcher sich gegen eine unbewegliche Ebene stützt	282

Paragraph		Seite
93.	Beispiele. Stabilität	284
94.	Gleichgewicht eines Körpers auf der schiefen Ebene	287
95.	Bewegung auf der schiefen Ebene . . .	288
96.	Reibung auf einer Ebene	289
97.	Gesetze der Reibung der auf einer Ebene gleitenden Körper	291
98.	Einfluß des Grades der Glätte der Berührungsflächen auf die Größe der Reibung . . .	293
99.	Einfluß der Schmiermittel	294
100.	Einfluß der Dauer der Berührung. Reibung der Ruhe und Bewegung	295
101.	Einfluß der Temperatur, Gestalt der Flächen, Textur ꝛc.	296
102.	Bestimmung des Reibungswiderstandes. Reibungscoefficienten und Reibungswinkel . . .	297
103.	Reibung auf der Horizontalebene . . .	301
104.	Reibung auf der schiefen Ebene . . .	303
105.	Arbeitsgröße auf der schiefen Ebene . .	305
106.	Spannung eines Seils, welches auf der Oberfläche eines Körpers ausgespannt ist	—
107.	Reibung eines Seils, welches über eine feste Walze gleitet	308
108.	Gleichgewicht und Theorie des Keils . .	313
109.	Einfluß der Reibung auf die Wirkung des Keils .	315
110.	Anwendung des Keils zur Keilpresse . . .	317
111.	„ „ „ bei verschiedenen Werkzeugen	320

XI.

Reibung stehender und liegender Zapfen; rollende Reibung. Steifigkeitswiderstand der Seile.

112.	Reibung der Körper, welche sich auf einander drehen	323
113.	Reibung an der Basis eines Zapfens . .	324
114.	Reibung liegender Zapfen in ihren Lagern . .	327
115.	Bestimmung des Drucks, welcher die Reibung erzeugt	329
116.	Arbeitsgröße der Zapfenreibung . . .	330
117.	Bemerkungen über die Dimensionen der Zapfen. Vortheile der schneidigen Zapfen . . .	331
118.	Wälzende Reibung	333

Paragraph		Seite
119.	Verminderung der gleitenden Reibung durch Erzeugung von Walzenreibung	334
120.	Steifigkeitswiderstand der Seile	339

XII.

Vom Hebel.

121.	Verschiedene Arten des Hebels	345
122.	Gleichgewicht des Hebels	—
123.	Anwendung des Hebels und Vortheile desselben .	346

XIII.

Berechnung der Räder und ihrer Widerstände.

124.	Gleichgewicht der Kräfte an einem Rade, mit Rücksicht auf die Zapfenreibung	349
125.	Gleichgewicht der festen Rolle	354
126.	Gleichgewicht der losen Rolle	356
127.	Der Flaschenzug	357
128.	Gleichgewicht der Radwelle	360
129.	Räderwerke	362
130.	Widerstände, durch die Spannung der Schnüre und Riemen erzeugt	363
131.	Widerstand der Ketten	365
132.	Widerstände bei der Mittheilung der Bewegung durch Frictionsscheiben	366
133.	Widerstände bei Zahnrädern	367

XIV.

Berechnung der Schrauben.

134.	Beschreibung der Schraube mit flachem Gewinde .	369
135.	Gleichgewicht dieser Schraube ohne Rücksicht auf Reibung	371
136.	Arbeitsgröße der Reibung an dieser Schraube .	372
137.	Dimensionsverhältnisse an den Schrauben und Einfluß der Reibung	373
138.	Reibung am Fußlager der Spindel oder Mutter .	375
139.	Schrauben mit scharfen Gewinden	377
140.	Einige besondere, bei den Schrauben vorkommende Fälle	380
141.	Die Schraube ohne Ende	381

Druckberichtigungen.

Seite 10 Zeile 6 von unten lies Pascal statt Poscal.
„ 25 „ 14 ꝛc. v. o. l. α das Verhältniß des Kilogramms zum Pfundgewichte irgend eines Staates, und β das Verhältniß des Meters zum Fußmaße ꝛc.
„ 42 „ 19 v. o. l. cd'd'' st. c'd'd'.
„ 57 „ 7 v. u. l. Kräfte st. Punkte.
„ 63 „ 2 v. u. l. (Fig. 24) st. (Fig. 22).
„ 63 „ 1 v. u. l. ag st. ab.
„ 64 „ 3 v. o. l. ag st. ab.
„ 74 „ 5 v. u. l. Coulomb st. Columb.
„ 87 „ 16 v. u. l. A_1 st. A_2.
„ 99 „ 16 v. o. l. von einem st. mittelst eines.
„ 99 „ 17 v. o. l. Körper st. Körpers.
„ 121 „ 9 v. u. l. vv_1 st. vv'.
„ 155 „ 6 v. o. (Fig. 63) st. (Fig. 64).
„ 232 „ 13 v. o. l. durch st. drrch.
„ 239 „ 10 v. u. l. durch st. drrch.
„ 240 „ 10 v. o. l. in st. ein.
„ 257 „ 3 v. o. l. 78a st. 78.
„ 273 „ 8 v. o. l. $\sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$
„ 275 „ 8 v. o. l. (Fig 156) st. (Fig. 56).
„ 279 „ 3 v. o. l. $pl\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2h}\right)^2}$
„ 291 „ 15 v. o. l. Rennie st. Remie.
„ 371 „ 10 v. u. l. sein st. seyn.
„ 375 „ 12 v. u. ist hinter „beträgt" ein Komma einzuschalten.
„ 380 „ 7 v. u. l. Für st. für.

Nachträgliche Druckberichtigungen zum II. Theil.

Seite 18 Zeile 3 v. o. l. 48 und 49 st. 50 und 51.
„ 19 „ 3 v. u. l. 114 st. 121.
„ 20 „ 9 v. o. l. 117 st. 122.
„ 20 „ 12 v. o. l. 97 st. 107.
„ 32 „ 15 „ „ } l. 114 und 115 st. 121.
„ 32 „ 20 „ „ }
„ 34 „ 5 v. u. l. 108 und 110 st. 114 und 116.
„ 39 „ 13 „ „ l. 134 bis 140 st. 136 bis 141.
„ 43 „ 8 „ „ l. 58 st. 60.
„ 46 „ 6 v. o. l. 141 st. 142.
„ 51 „ 8 v. u. l. 101 st. 106.
„ 100 „ 2 v. u. l. 107 st. 112.
„ 213 „ 3 v. o. l. 101 st. 106.
„ 366 „ 8 v. u. l. Manometer st. Monometer.
„ 476 „ 2 „ „ l. dn — ds st. dn = ds.

Einleitung in die industrielle Mechanik.

Erste Abtheilung.

Fundamental-Sätze.

Unter dieser Benennung begreifen wir alles das, was sich auf die wesentlichsten Eigenschaften der Materie bezieht oder der industriellen Mechanik zur Basis dient: namentlich die allgemeinen physischen Eigenschaften der Körper; die Gesetze der einfachen Bewegung; die Wirkung der Kräfte auf die Körper; die durch jene geleistete Arbeit, so wie die durch diese entstehenden Widerstände; endlich die Gesetze der unmittelbaren Mittheilung der Bewegung und die Veränderung der Arbeit in lebendige Kraft.

I.

Allgemeine Begriffe über die Beschaffenheit und die physischen Eigenschaften der Körper.

1. Hauptzustände der Körper. — Die Körper unterscheiden sich dem Äussern nach durch zwei wesentlich von einander verschiedene Zustände. Wir nehmen nämlich dieselben entweder im festen oder im flüssigen Zustande wahr.

A.) Körper im festen Zustande sind diejenigen, die mehr oder weniger einem gegen sie ausgeübten Druck widerstehen; solche sind: die Steine, die Hölzer und die Metalle, im Allgemeinen betrachtet. Gewisse feste Körper sind hart, spröde oder zerbrechlich, wie z. B. das Glas, der gehärtete Stahl, der Marmor; andere sind weich, dehnbar, wie z. B. der feuchte Thon, das Blei, das Kupfer, das Eisen (namentlich, wenn sich dasselbe im glühenden Zustande befindet) ꝛc.; die dehnbaren Metalle nennt man auch streckbar. Die Dehnbarkeit oder Streckbarkeit gewisser Metalle ist von der größten Wichtigkeit für die industriellen Künste und Gewerbe, namentlich deshalb, weil man in Folge dieser Eigenschaft ihre Formen auf unendlich verschiedene Arten verändern kann, ohne daß sie brechen oder sich in Stücke zertheilen. Wir werden weiter unten Beispiele von der großen Dehnbarkeit des Silbers, Goldes und des Platins anführen.

B.) Körper im flüssigen Zustande sind diejenigen, deren Theile durch die kleinste, an ihnen angebrachte, Kraft absolut leicht verschiebbar sind. Die flüssigen Körper zerfallen wieder in tropfbar flüssige und in ausdehnsam flüssige oder gasförmige. *) Jene lassen sich nur schwer zusammendrücken; diese hingegen sind leicht

*) Unter gasförmigen Körpern versteht man solche, die bei jeder Temperatur und jedem noch so großen Druck in dem ausdehnsamen Zustande verbleiben. Dagegen nennt man ausdehnsame Körper, die bei einem bestimmten Drucke und einer bestimmten Temperatur tropfbar werden, Dünste. Dem dermaligen Zustande der Physik zu Folge scheint es keinen ausdehnsamen Körper zu geben, der nicht durch einen hinreichenden Druck in den tropfbaren Zustand zurückgebracht werden könnte. Die oben gebrauchte Benennung „gasförmig" ist daher so zu nehmen, daß man darunter solche Körper versteht, die bei dem gewöhnlichen Luftdruck und den gewöhnlichen in der Atmosphäre stattfindenden Wärmegraden ausdehnsam verbleiben.

zusammendrückbar und streben ihr Volumen in dem Grade wieder zu vergrößern, in dem der Druck vermindert wird.

a.) Körper in tropfbar flüssigem Zustande. Solche sind das Wasser, der Wein, das Queckſilber und die Flüssigkeiten im Allgemeinen; sie unterscheiden sich von den festen Körpern durch die ausserordentliche Beweglichkeit ihrer Theile. Dieselbe findet jedoch in verschiedenen Graden der Abstufung bei den tropfbar flüssigen Körpern statt; sie ist sehr groß in dem Äther und dem rectificirten Weingeist; geringer in dem Wasser und dem Weine und noch geringer in den fetten Ölen, dem Syrup, den Fettarten und den schwer schmelzbaren flüssigen Metallen; diejenigen, die in sehr geringem Grade flüssig sind und sich deshalb fadenförmig in die Luft ausgießen, nennt man kleberig. Endlich kann sich eine Flüssigkeit in einem Zustande befinden, der demjenigen der sehr weichen festen Körper ganz nahe liegt, wie z. B. der Kleister, der Mehlteig und alle teigartigen Körper im Allgemeinen.

b.) Körper im ausdehnsam flüssigen Zustande nennt man Gase und Dämpfe.

Das Sauerstoffgas, das zur Verbrennung der Körper und zur Respiration der Thiere so wesentlich nothwendig ist; das Stickgas, dessen Verbindung mit dem Sauerstoffgase die uns umgebende Luft bildet und dazu dient, die zu rasche Wirkung des Verbrennens zu mindern, das aber für sich allein weder für die Verbrennung noch für die Respiration geeignet ist; das Wasserstoffgas, das sich mit der Hülfe eines bestimmten Grades Wärme mit dem Sauerstoff der Luft verbindet und die Flamme, welche unsere Wohnungen erleuchtet, bildet; die Kohlensäure, welche durch die Verbrennung der reinen Kohle (des Kohlenstoffs) und durch die Vereinigung des letztern mit dem Sauerstoff entsteht, und dessen Gegenwart in geschlossenen Räumen, wo Kohlen brennen, oder an solchen Orten, wo Trauben oder Weine sich in Gährung befinden, fühlbar wird ꝛc., sind eben so viele von einander verschiedene Gasarten.

Mit dem Namen Dämpfe bezeichnet man speciell diejenigen Gase, welche man erhält, wenn Flüssigkeiten in, von allen Seiten geschlossenen, Gefäßen erwärmt werden; sie sind fast so unsichtbar als die uns umgebende Luft, wie z. B. die in den Kesseln der Dampfmaschinen gebildeten Wasserdämpfe.

Die Existenz so wie die Materialität der Luft, der Gase und der Dämpfe ist durch eine Menge Thatsachen bewiesen. Eingeschlossen in biegsame undurchdringliche Hüllen, z. B. in einer Blase, widerstehen sie dem Druck gerade so, wie die gewöhnlichen festen Körper; die in einem Glase enthaltene Luft verdrängt das Wasser aus seiner Stelle, wenn jenes umgekehrt in dieses eingetaucht wird, jedoch wird dasselbe in dem Augenblick beginnen, das Glas anzufüllen, sobald als an dessen oberstem Theil eine Öffnung, durch welche die Luft entweichen kann, gemacht wird. Die Winde, der Orkan, welche nichts anderes als in Bewegung befindliche Luft sind, stürzen Häuser um und entwurzeln Bäume, gerade so, wie es mächtige Wasserstürze thun. Überdieß setzt sich die Luft eben sowohl, wie das Wasser der Bewegung der Körper entgegen, was man gewöhnlich ihren Widerstand nennt. Endlich weiß man auch, daß der Wind als bewegende Kraft bei industriellen Maschinen verwendet wird und daß dasselbe ebenfalls der Fall mit den Wasserdämpfen ist, jedoch in beiden Fällen unter sehr verschiedenen Umständen.

Die Luft ist hauptsächlich diejenige Gasart, die unsere ganze Erde bis über die höchsten Berge hinaus umgibt, und die in allen Naturerscheinungen und in der industriellen Mechanik eine so wesentliche Rolle spielt. Da man diese unermeßliche Masse Luft die Atmosphäre nennt, so gibt man der Luft selbst den Namen atmosphärische Luft, um sie von andern Gasarten, denen man zuweilen den Namen Luft beilegt, zu unterscheiden.

Eine große Anzahl bekannter Körper kann mittelst der Wärme, und ohne eine Veränderung in ihrem Wesen zu erleiden, nach und nach aus dem festen Zustande in den flüssigen und gasförmigen übergehen; solches ist der Fall mit

dem Wasser, welches als Eis fest ist, in seinem gewöhnlichen Zustande flüssig ist und sich in Dampfform befindet, wenn es in verschlossenen Gefäßen erhitzt wird. Umgekehrt können Dämpfe und gewisse Gasarten, wie z. B. die Kohlensäure, in den flüssigen und festen Zustand durch Erkältung oder Zusammendrückung übergehen. Man nennt Schmelzen, Zergehen den Übergang von dem festen Zustande in den flüssigen; Verdünstung, Verflüchtigung den Übergang eines festen oder flüssigen Körpers in die Dampfform, und Verdichtuug oder Condensation das Umgekehrte des letztern; endlich nennt man noch Gefrieren oder Erstarren den Übergang von dem flüssigen in den festen Zustand.

2. Theilbarkeit der Körper. — Alle flüssigen Körper, gleichviel ob sie sich in tropfbar flüssigem oder gasförmigem Zustand befinden, sind ihrer bereits im vorigen Paragraphen erörterten Eigenschaften zufolge theilbar und es ist begreiflich, daß diese Theilung oder Trennung der Theile ausserordentlich weit getrieben werden kann. Da nun alle festen Körper durch physische und chemische Wirkungen in den flüssigen Zustand versetzt werden können, indem man sie entweder auflöst, oder der Einwirkung der Wärme aussetzt, oder mittelst Säuren behandelt, so sieht man klar, daß die Theilbarkeit eine allgemeine Eigenschaft der Materie ist. Für viele industrielle Künste und Gewerbe ist besonders die mechanische Theilung der Körper von Wichtigkeit, es ist daher nützlich, die wesentlichen Hülfsmittel, deren man sich zu diesem Zwecke bedient, kennen zu lernen.

Man theilt die Steine, die Hölzer, die Metalle ꝛc. durch den Stoß und durch die Reibung und bedient sich dazu der Hämmer, Stampfer, Keulen, Reiber, Meisel, Hobel, Scheren, Sägen, Raspeln, Feilen ꝛc.

Die feinsten Theile sondert man von den gröbern mittelst Hand- oder Beutelsieben ab; jedoch erreicht man diesen Zweck noch besser, indem man das Schlämmen,

das Ausblasen und in gewissen Fällen das Sublimiren anwendet.

Das Schlämmen kann allemal angewendet werden, wenn der Körper unauflöslich in dem Wasser und schwerer als dasselbe ist. Man bringt den bereits pulverisirten Körper in ein mit Wasser gefülltes Gefäß, rührt den Inhalt um und läßt das Gemenge eine kürzere oder längere Zeit, je nach dem Zustand der Theilung, den man erlangen will, ruhig stehen; hierauf gießt man die Flüssigkeit in ein anderes Gefäß über, welches man ebenfalls so lange ruhig stehen läßt, bis sich die im Wasser schwebenden Körpertheilchen zu Boden gesetzt haben, was öfters erst in einigen Tagen geschieht. Nun wird das darüberstehende, wieder klar gewordene Wasser behutsam abgegossen, und der am Boden befindliche Rückstand herausgenommen und getrocknet, welcher nun der fein zertheilte Körper ist.

Durch das Ausblasen erreicht man denselben Zweck. Man setzt in einem besonders dazu eingerichteten Apparat die Luft mittelst eines Blasbalges, einer Schwinge oder eines Windfanges in Bewegung, welche dann die durch eine Öffnung niederfallenden gepulverten Theile des Körpers um so weiter forttreibt, je feiner und leichter sie sind. Auf diese Weise theilt man die Kohlen und den Schwefel in den Pulverfabriken. Auch in der Landwirthschaft wird dieses Verfahren angewendet, um die Getreidkörner von ihren Hülsen abzuscheiden.

Das Sublimiren besteht darinnen, daß man den Körper mittelst der Wärme in einem geschlossenen Gefäße verdampft und hierauf die Dämpfe durch Erkalten condensirt. Auf diesem Wege gewinnt man die Schwefelblumen, reines, von andern beigemischten Metallen befreites, Queckſilber ꝛc.

Die so eben betrachteten Operationen geben schon einen ziemlichen Begriff von der großen Theilbarkeit der Materie; wir wollen jedoch noch einige andere interessante Beispiele anführen.

Beobachtet man einen Lichtkegel, der durch die Sonnenstrahlen entsteht, welche durch eine kleine Öffnung in ein

verfinstertes Zimmer, in dem zuvor sehr feiner Staub aufgerührt worden ist, einfallen, so wird eine unendliche Menge sehr kleiner Körperpartikelchen in ihm in Bewegung wahrgenommen werden, welche man nicht fühlen und ausserhalb dieses Lichtkegels — selbst bei Tageslicht — nicht sehen kann.

Ein Gran Carmin in ohngefähr 25 Pfund Wasser aufgelöst, färbt diese Flüssigkeit durchaus merkbar roth; nimmt man an, daß in $\frac{1}{10}$ Gran Wasser sich ein solches Farbetheilchen befindet, so ist dadurch dieses Gran Carmin beinahe in zwei Millionen Theilchen getheilt.

Wenn in einem hohlen Silbercylinder ein dünner Platindraht eingeschlossen, hierauf in einem Drahtzuge zu einem so dünnen Drahte als es auf diesem Wege möglich ist, ausgezogen, und dann das Silber in Scheidewasser aufgelöst wird, so ist der Durchmesser des so erlangten Platinfadens nicht größer als $\frac{1}{1200}$ Millimeter; 3000 Fuß desselben wiegen nicht mehr als ein Gran und 140 dieser Fäden, in einen Büschel zusammengenommen, haben erst die Dicke eines einzelnen Seidenfaden. Nun betragen 3000 Fuß 432000 Linien, und jede Linie kann sehr wohl noch in 10 Theile getheilt werden, woran jeder Theil noch sichtbar ist, folglich ist auf diesem Wege ein Gran Platin in mehr denn vier Millionen Theile getheilt.

Dieses letztere Beispiel beweist zugleich die große Dehnbarkeit und Zähigkeit des Platins. Das Gold und das Silber sind jedoch nicht minder dehnbar, wie durch ähnliche Beispiele nachgewiesen werden könnte.

Die Natur bietet uns jedoch in organischen Körpern noch anderweitige Beispiele dar, wo die Theilung der Materie in noch höherm Grade stattfindet. Dies ist z. B. der Fall bei den Infusionsthierchen, welche man nur unter dem Microscop in gewissen Flüssigkeiten wahrnimmt, die in allen ihren Theilen aus einer analogen Materie, wie andere Thiere zu bestehen scheinen und mit physischen Eigenschaften begabt sind, obgleich man mehrere Tausend mit der Spitze einer Nähnadel aufzufassen im Stande ist.

Die Imagination kann zwar über die Gränzen, welche durch die eben aufgeführten Beispiele bezeichnet sind, noch hinaus gehen, aber darf man daraus folgern, daß die Körper ins Unendliche fort theilbar sind? — Die Chemie scheint das Gegentheil zu beweisen.

Da man den letztern Grad der Theilung eines Körpers nicht anzugeben vermag, so nennt man dessen kleinste Theilchen, die nicht mehr physisch theilbar sind, Atome, und eine Gruppe solcher Atome, Molecülen oder Partikel eines Körpers.

3. Porosität der Körper. — Man nennt im Allgemeinen die zwischen den Atomen oder Partikelchen eines Körpers befindlichen Zwischenräume Poren. — Die zwischen den erstern sind gänzlich unbemerkbar, hingegen können die zwischen den letztern befindlichen in besondern Fällen wahrgenommen werden. — Der Schwamm bietet ein Beispiel dar, wo die Poren verschiedene Größe haben.

Der Raum, den die in einem Körper enthaltene Materie einnimmt, nennt man dessen wirkliches Volumen, hingegen denjenigen, welchen die Umhüllung des Körpers einschließt, dessen scheinbares Volumen. Die Differenz zwischen beiden ist das Volumen der Poren; jemehr also das scheinbare Volumen vermindert wird, desto mehr nähert sich der Körper seinem wirklichen Volumen. Der Schwamm, der durch äussern Druck bis auf ein Zehntel oder Zwanzigstel zusammengepreßt werden kann, bietet ein solches Beispiel dar.

Die Porosität der Körper ist durch eine unendliche Menge von Körpern, die von Flüssigkeiten durchdrungen werden, bestätigt. Alle Gewebe oder gewirkte Stoffe, das Leder, das Holz, befinden sich in diesem Falle, und auf diese Eigenschaft hin gründet sich die Anwendung des Filtrums. Das Holz vermehrt sein Gewicht und quillt durch die Feuchtigkeit, die es aufnimmt, auf; es schwindet zusammen und vermindert sein Gewicht, wenn anhaltende Trockenheit in der Luft, die es umgibt, stattfindet, wie wir an den Holzverkleidungen unserer Wohnungen sehen. Um diese Wirkungen zu vermin-

dern und um das Holz vor der dadurch entstehenden Zerstörung zu bewahren, überzieht man es mit Firnissen oder mit Theer. Beim Steinbrechen wird die Eigenschaft des Holzes, daß es durch die Aufnahme der Feuchtigkeit aufquillt, mit Erfolg zum Abtrennen großer Steinblöcke angewendet, indem man in eine gemachte Furche hölzerne Keile eintreibt, und diese dann mit Wasser übergießt. Durch das gleichzeitige Aufquellen derselben erzeugt sich eine Kraft, die hinreichend ist, den Steinblock loszutrennen. Trockene Seile, die mit Wasser benetzt werden, vergrößern ihren Durchmesser und vermindern ihre Länge. Dies war den Alten schon bekannt, da sie sich dieser Eigenschaft zum Erheben enormer Lasten in besondern Fällen bedienten.

Gewisse Steine, wie z. B. der Sandstein, lassen die Feuchtigkeit durchsickern und dienen zuweilen als eine Art Filtrum; diese Steine, wenn man sie der Feuchtigkeit aussetzt, vermehren ihr Gewicht. Alle frisch aus einem Steinbruch kommenden Steine sind feucht und in diesem Zustande können selbst die härtesten behauen werden; besonders ist dies der Fall mit dem Feuerstein, der nur im feuchten Zustande bearbeitet werden kann.

Selbst die Metalle werden von Flüssigkeiten durchdrungen, wenn der dabei angebrachte Druck hinreichend stark ist, wie es der von Cruſca zu Florenz mit einer dünnen, mit Wasser angefüllten, goldenen Kugel angestellte Versuch bewiesen hat, und welcher seitdem auch mit andern Metallen wiederholt worden ist.

Jedoch sind nicht alle Körper wie die obenerwähnten zusammengesetzt; das Glas besonders scheint absolut undurchdringlich für die Flüssigkeiten und für die Gase zu sein, was dasselbe auch in einer Menge von Fällen so schätzbar macht; aber wir werden bald beweisen, daß alle Körper ohne Unterschied, sie seien fest oder flüssig, ihr Volumen durch den Druck und durch die Erkältung vermindern, und daß also bei allen zwischen ihren Atomen und Molecülen Poren vorhanden sind.

4. Von der Compressibilität und der Elasticität der Körper. —

A.) Compressibilität der Körper. — Alle Körper, welche man einem Druck aussetzt, werden in einem gewissen Grade zusammengedrückt und haben dann ein geringeres scheinbares Volumen. Diese Eigenschaft der Körper nennt man Compressibilität.

Die natürlichen und die künstlichen Gewebe, so wie der Schwamm, das Leder, die Hölzer und alle Stoffe, welche sehr viele Poren haben, sind diejenigen festen Körper, welche am meisten compressibel sind. Man kann daher auch die Flüssigkeiten, welche sie enthalten, mittelst der Compression ihnen entziehen. Die feinen Gewebe, das frisch aus der Bütte geschöpfte Papier, die in zerriebenem Zustande befindlichen Runkelrüben ꝛc. lassen sämmtlich die in ihren Poren eingeschlossene Flüssigkeit unter der Wirkung der Presse fahren.

Die bei der Bildung unserer Gebäude aufeinander geschichteten Steine senken sich, oder die tiefer liegenden werden durch die darüber befindlichen zusammengedrückt und in besonderen Fällen, wenn die Last sehr groß ist, sogar zerdrückt.

Metalle werden durch Hammerschläge oder durch Fall- oder Prägewerke dichter, compakter, und das ursprüngliche Volumen wird auf ein geringeres reducirt. Besonders nimmt man dies beim Münzprägen wahr.

Flüssigkeiten sind im Allgemeinen viel weniger zusammendrückbar als feste Körper. — Wasser in einer bronzenen, drei Zoll dicken Kanone eingeschlossen und mittelst eines Kolbens sehr stark gepreßt, zersprengte das Geschütz, bevor sein Volumen um $\frac{1}{20}$ vermindert war.

Hier müssen wir eines sehr wichtigen, von Pascal entdeckten Princips gedenken, das unter den Namen: Gleichheit des ausgeübten Drucks der Flüssigkeiten bekannt ist. Wenn nämlich in einem Gefäße von beliebiger Form eine Flüssigkeit eingeschlossen ist und man bringt an irgend einer Stelle der Wandfläche einen Druck gegen die Flüssig-

keit an, so pflanzt sich jener in dieser nach allen Richtungen in gleicher Stärke fort und bringt an einer andern eben so großen Stelle der Wandfläche denselben Druck hervor; d. h. wenn die Öffnung in der Wandfläche, an welcher der Druck applicirt wird, einen Quadratzoll groß ist und der dagegen stattfindende Druck ein Pfund beträgt, so wird jede andere Stelle der Wandfläche des Gefäßes, die ebenfalls einen Quadratzoll groß ist, mit derselben Kraft, mit einem Pfunde, gedrückt. In dem vorhin angeführten Beispiel, wo das Wasser in einer Kanone eingeschlossen war, betrug der Druck auf jedem Quadratcentimeter des Kolbens 1033 Kilogramme, bevor sie zersprang. Dieser Druck hat sich dem eben angeführten Princip zu Folge durch das eingeschlossene Wasser nach allen Richtungen verbreitet und brachte gegen jeden Quadratcentimeter der innern, von Wasser benetzten Wandfläche der Kanone einen Druck hervor, der ebenfalls gleich 1033 Kilogramm war.

Die Gase sind unter allen Körpern am meisten zusammendrückbar. Wenn man z. B. in einem hohlen Cylinder (Fig. 1), dessen eines Ende geschlossen ist, einen Kolben anbringt, so kann die darin enthaltene Luft, wenn der Durchmesser des Cylinders nicht groß ist, etwa höchstens einen Zoll mißt, durch das Niederdrücken des Kolbens mit der Hand bis auf ein Zehntel oder ein Zwanzigstel ihres ursprünglichen Volumens zusammengedrückt werden. Dieses Volumen mindert sich nach Maßgabe als der Druck vermehrt wird, kann aber, wegen der Unveränderlichkeit und Undurchdringlichkeit des Molecülen der Luft, auf keinerlei Weise auf Nichts zurückgebracht werden, weshalb es nothwendigerweise eine Grenze der Compression geben muß. Wenn man mit dem Druck allmählig nachläßt, so wird der Kolben durch die comprimirte Flüssigkeit wieder herausgetrieben und zwar so lange, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage gekommen ist. Wird jetzt — in der Voraussetzung, daß der Cylinder die erforderliche Länge besitzt — jener noch weiter herausgezogen, so dehnt sich die unter ihm befindliche Luft aus und nimmt,

in dem Grade wie der Kolben weiter herausgezogen wird, einen immer größern Raum ein. Dieses Vergrößern des Volumens der eingeschlossenen Luft kann bis zu jedem beliebigen Grade getrieben werden, ohne daß eine Grenze dafür anzugeben ist; man nennt es die Expansion oder die Ausdehnung des Gases. Es scheint, daß alle Gase das Bestreben besitzen, sich ins Unendliche fort auszudehnen, wenn ihnen keine Hindernisse entgegen treten.

In dem so eben betrachteten Beispiele wollen wir nun annehmen, daß der Druck, den die unter dem Kolben befindliche Luft ausübt, für einen Quadratzoll Fläche ein Pfund betrage, wenn sie ein gewisses Volumen einnimmt; wird dasselbe dadurch, daß der Kolben tiefer eingetrieben wird, auf die Hälfte vermindert, so wird dann der Druck auf den Quadratzoll zwei Pfund, und wenn er auf den dritten Theil vermindert wird, drei Pfund u. s. w. betragen. Wenn man sich hingegen den Kolben wieder in seine urspüngliche Lage, wo der Druck der eingeschlossenen Luft auf den Quadratzoll einem Pfund gleich ist, versetzt denkt und ihn jetzt, statt hineinzudrücken, so weit heraus zieht, bis sich das Volumen der eingeschlossenen Luft verdoppelt hat, so wird ihr Druck auf den Quadratzoll nur einem halben Pfund, und wenn das Volumen der Luft durch noch weiteres Herausziehen verdreifacht wird, nur einem dritel Pfund u. s. w. gleich sein. In dem eben betrachteten Falle nennt man den Druck, welchen die eingeschlossene Luft ausübt, auch ihre Spannung; dieselbe verbreitet sich ebenfalls nach allen Richtungen gleichmäßig. Dieses von Mariotte entdeckte Gesetz gilt nicht nur für die atmosphärische Luft, sondern für alle Gase, und selbst für die Dämpfe, wenn diese ihren Zustand nicht verändern oder sich durch die Compression nicht condensiren, so daß ihre Quantität immer dieselbe bleibt.

B.) Elasticität der Körper. — Wenn ein Körper durch irgend eine auf ihn einwirkende Kraft seine Form verändert hat, und nach Beseitigung derselben durch ein ihm inwohnendes Bestreben wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, so nennt man dasselbe die Elasti-

cität des Körpers; gewöhnlich wird diese Eigenschaft eines Körpers auch mit dem Namen Federkraft bezeichnet, und Körper, welche dieselbe in einem ziemlich hohen Grade besitzen, nennt man kurzweg Federn. Dieselben sind von großem Nutzen in den Künsten und Gewerben; bei den Fuhrwerken mindern sie die durch die Unebenheit des Weges entstehenden Erschütterungen, bei den Maschinen die schädlichen Wirkungen der Stöße; sie bewegen unsere Taschen- und Pendeluhren ꝛc., was alles eine Folge ihrer Elasticität oder ihrer Federkraft ist. Das Heu, die Papierabschnitte und andere ähnliche Körper, in denen die Erzeugnisse der Kunstfleißes verpackt und versendet werden, bewahrt dieselben vor Erschütterungen, was ebenfalls eine Folge der diesen Stoffen inwohnenden Elasticität ist.

Man unterscheidet die Elasticität der Form von der Elasticität des Volumens. — Die Stahlfeder, welche sich biegt und ihre Form verändert, ohne daß sie ihr Volumen merklich vermehrt oder vermindert, ist ein Beispiel der ersten, und die eingeschlossene und zusammengedrückte Luft ein Beispiel der zweiten Art.

Die Elasticität eines Körpers ist vollkommen, wenn derselbe, um in seinen ursprünglichen Zustand zurückzukehren, dieselbe Kraft verwendet, die erforderlich war, um ihn aus diesem in jenen zu versetzen.

Die festen Körper besitzen nicht in der beinahe unbedingten Ausdehnung, wie es bei den flüssigen Körpern wahrgenommen wurde, eine vollkommene Elasticität. Für alle gibt es eine Dauer und eine Grenze der Compression, über welche hinaus sie ihre ursprüngliche Gestalt entweder gar nicht mehr oder nur in einem unvollkommenen Grade wieder annehmen. Die beste Stahlfeder, wenn sie zu stark gebogen wird, zerspringt. Allgemein sagt man, ein Körper sei mehr elastischer als ein anderer, wenn seine Formveränderung in einem höhern Grade stattfinden kann, ohne daß er dadurch verhindert wird, in seinen ursprünglichen Zustand wieder vollkommen zurückzukehren. Ein Stahlstreifen ist elastischer als ein Glasstreifen

und dieser ist es wieder mehr als ein Bleistreifen. Indessen gibt es keinen Körper, der nicht für eine bestimmte Biegung oder bestimmten Druck, den er erleidet, vollkommen elastisch wäre. Wird z. B. ein Bleistreifen nur sehr wenig gebogen, so nimmt derselbe augenblicklich seine ursprüngliche Form wieder an, wenn die Kraft, welche diese Biegung verursachte, wieder weggenommen wird. In diesem Falle kann man also sagen, daß dieser Bleistreifen unter der Grenze der hervorgebrachten Biegung vollkommen elastisch ist. Es ist dasselbe mit allen andern festen Körpern, und ihre Elasticität der Form oder des Volumens ist in der That nur eine relative Eigenschaft.

Wenn den festen Körpern die Form eines Würfels oder einer Kugel, statt derjenigen eines Stabes oder eines Streifens gegeben wird, so ist die ihm zukommende Elasticität, obgleich sie dann weniger bemerkbar ist, nicht minder als in jeder andern Form in demselben vorhanden. Eine mit einer Oelschichte überzogene Elfenbeinkugel wird, wenn man sie von einer gewissen Höhe auf eine marmorne oder gußeiserne Platte herabfallen läßt, einen mehr oder weniger großen kreisförmigen Fleck zurücklassen, welches beweist, daß sie sich beim Auffallen zusammendrückt, hierauf durch die Wirkung der ihr inwohnenden Federkraft ihre Form wieder herstellt und in Folge derselben zurückspringt, wie man durch Wiederholung dieses Versuches sich zur Genüge überzeugen kann.

Eine Elfenbeinkugel ist elastischer als eine Bleikugel, weil jene zu einer größern Höhe zurückspringt und ihre ursprüngliche Form wieder annimmt, was diese nicht thut.

Ein dünner Stahlreif, wenn derselbe in der Richtung eines seiner Durchmesser zusammengedrückt und dann sich selbst überlassen wird, erweitert sich in der Richtung, in der er zusammengedrückt wurde, über seine ursprüngliche Form hinaus, zieht sich hierauf wieder zusammen, erweitert sich wieder u. s. w. Eine solche Bewegung nennt man eine Oscillation (Schwingung). Alle elastischen Körper, welche entweder gestoßen oder auf irgend eine Weise aus ihrer natürlichen Lage gebracht worden sind, machen eine Anzahl Oscil-

lationen, die immer schwächer und schwächer werden, und kehren zuletzt in ihre ursprüngliche Lage oder Form zurück.

Wenn die Oscillationen sehr rasch aufeinander folgen, so daß man sie nicht mehr bestimmt von einander unterscheiden kann und der Körper sich gleichsam in einer Art zitternder Bewegung befindet, dann nennt man sie Vibrationen (sehr kleine rasch aufeinander folgende Schwingungen). Diese Vibrationen sind es, welche, zuvor in die Luft und durch diese in unser Ohr übertragen, in diesem das Gefühl der verschiedenen Töne erzeugen. Die Eigenschaft, welche die festen, flüssigen und gasförmigen Körper besitzen, die tönenden Vibrationen überzutragen oder wiedertönen zu lassen, ist ein anderes Mittel, wodurch ihre Elasticität und folglich auch ihre Compressibilität bewiesen werden kann.

Feste Körper können zum Theil ihre Elasticität verlieren, was augenscheinlich nur eine Folge der stattgefundenen Störungen in der gegenseitigen Lage ihrer Molecülen sein kann. In dem Falle also, wo feste Körper in den Künsten und Gewerben den Wirkungen des Druckes oder der Ziehung ausgesetzt werden, muß man wohl Rücksicht nehmen, daß dieselben die Gränzen, über welche hinaus ihre Elasticität alterirt wird, nicht überschreiten. So lehrt z. B. die Erfahrung, daß, wenn ein eiserner Stab nach seiner Längenrichtung durch ein angehängtes Gewicht gezogen wird und dasselbe für einen Quadratmillimeter Querschnitt 6 bis 7 Kilogramme übersteigt, seine Elasticität anfängt, sich zu mindern, und daß dieser Stab abreißt, wenn dasselbe bis zu 35—40 Kilogrammen angewachsen ist. Dies ist der Fall mit allen andern Körpern; sie verlieren ihre Elasticität bei einer viel geringern Wirkung als diejenige ist, welche ihr Abreißen veranlaßt.

Stabeisen, Eichenholz und Tannenholz zerreißen, wenn sie mit 35, 13 und 9 Kilogramm für ohngefähr jeden Quadratmillimeter belastet werden, und ihre Elasticität wird schon alterirt, wenn diese Gewichte 6, 3 und 2 Kilogramme betragen.

Innerhalb der Gränze, wo die Elasticität nicht alterirt wird, betrachtet man daher dieselbe als vollkommen und in diesem Falle bringen die nach der Längenrichtung eines Körpers wirkenden Kräfte in demselben Verlängerungen hervor, die diesen ziehenden Kräften proportional sind. Wenn daher ein angehängtes bestimmtes Gewicht einen Körper um $\frac{1}{10}$ Linie ausdehnt, so wird dieses Gewicht, doppelt genommen, ihn um $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ Linien ausdehnen u. s. w.

5. Ausdehnbarkeit der Körper. Begriffe über die Wärme und über die innere Beschaffenheit der Körper. —

A.) Ausdehnbarkeit der Körper. — Die Eigenschaft oder das Bestreben der Körper, ihr Volumen zu vermehren, wenn man sie erwärmt, und es zu vermindern, wenn man sie erkältet, nennt man die Ausdehnbarkeit derselben.

a.) Gase. Die Gase sind diejenigen Körper, welche sich am meisten durch die Wärme ausdehnen. Man beweist die Ausdehnbarkeit derselben mittelst des Rumford'schen Thermoscops, welches aus zwei mit atmosphärischer Luft gefüllten Glaskugeln (Fig. 2) besteht, die mittelst einer engen horizontalen Röhre, in welcher sich in der Mitte ein Tropfen gefärbter Weingeist befindet, mit einander in Verbindung stehen. Die Wärme der Hand ist hinreichend, die Luft in der einen Kugel auszudehnen und den Grad derselben durch die Verschiebung des Weingeisttropfens sichtbar zu machen, indem derselbe nach der andern Kugel hin verschoben wird, wenn man die eine Kugel in die Hand nimmt, dagegen an seine ursprüngliche Stelle zurückkehrt, wenn man diese wieder von der Kugel entfernt.

b.) Flüssigkeiten, Thermometer. Das Wasser und die andern Flüssigkeiten sind ebenfalls auch durch die Wärme ausdehnbar, was mittelst des Thermometers bewiesen werden kann. Dieses ist ein, Jedermann bekanntes, physikalisches Instrument, welches aus einer an dem einen Ende

geschlossenen und an dem andern Ende mit einer Kugel versehenen Glasröhre (Fig. 3) besteht, die mit einer Flüssigkeit, wozu man gewöhnlich Quecksilber nimmt, so gefüllt ist, daß nicht nur die Kugel ganz voll, sondern auch noch ein kleiner Theil in der Röhre enthalten ist; man wählt dieses flüssige Metall zu der Füllung, weil es verschiedene wesentliche Eigenschaften für den bezeichneten Zweck in sich vereinigt, welche die andern Flüssigkeiten nicht besitzen. Das Glas ist in sehr geringem Grade und die darin enthaltene Flüssigkeit in ziemlich hohem Grade ausdehnbar; die geringste Erwärmung oder Erkältung muß daher die in der Röhre enthaltene Flüssigkeit veranlassen, ihr Niveau zu verändern und zwar wird sie sich durch jene erheben, durch diese abwärts steigen. Um das Thermometer mit einer Scala versehen zu können, bestimmt man zuvor zwei Punkte an der Röhre dadurch, daß man sie zuerst in aufthauendes Eis, hierauf in reines kochendes Wasser einsenkt und in jeder dieser Flüssigkeiten so lange läßt, bis sich die Länge der Quecksilbersäule in der Röhre nicht mehr verändert, worauf man die Punkte, die dem Niveau des darin enthaltenen Queckſilbers entsprechen, an ihr bemerkt. Diese beiden so erhaltenen Punkte sind constant und bilden die Grenzen für die Eintheilung der Thermometerscala. Theilt man diese in 100 Theile, so erhält man das Celsius'sche Thermometer; theilt man sie in 80 Theile, so bekommt man das Reaumür'sche Thermometer und theilt man sie in 180 Theile, so wird das Fahrenheit'sche Thermometer erhalten. Für die beiden erstern schreibt man an den Aufthauungspunct des Eises die Zahl 0 und bei dem letztern die Zahl 32, so daß der Koch- oder Siedpunct des Wassers bei dem Celsius'schen Thermometer mit 100, bei dem Reaumür'schen mit 80 und bei dem Fahrenheit'schen mit 212 bezeichnet ist. Einen solchen Theil nennt man einen Grad des Thermometers. Man kann die Eintheilung sowohl oberhalb des Siedpunctes, als auch unterhalb des Aufthauungspunctes noch fortsetzen; Letzteres geschieht in der Regel, und die Grade

unter 0 (oder bei dem Fahrenheit'schen unter 32) nennt man dann in der gewöhnlichen Sprache Kältegrade. Die Anzahl der Grade des Thermometers, welche mit der Wärme eines Körpers übereinkommen, nennt man dessen Temperatur.

c.) Feste Körper, Pyrometer. Die festen Körper dehnen sich viel weniger als die flüssigen und gasförmigen durch die Wärme aus. Ihre Ausdehnung wird indessen dadurch merkbar gemacht, daß man die eine ihrer Dimensionen hinreichend vergrößert. Ein Metallstab, der zuvor ganz genau in die Ansätze (Fig. 4) eines andern hineinpaßt, kann nicht mehr zwischen dieselben gebracht werden, wenn man ihn bis zu einem gewissen Grade erwärmt. Nach diesem Princip construirt man die Instrumente, mittelst welchen die hohen Hitzgrade in den Porzellan- und Töpferöfen, so wie diejenigen anderer Feuerstellen, gemessen werden, und welche man Pyrometer nennt.

B.) Begriffe über die Wärme. In den durch die Wärme hervorgerufenen Erscheinungen verhält sich dieselbe in Betreff der Körper gerade so, wie die Flüssigkeiten, welche in die Poren der Körper eindringen und das Aufquellen derselben veranlassen. Indem man einen Körper zusammendrückt oder dessen Volumen vermindert, entweicht eine gewisse Quantität Wärme aus demselben, die sehr merkbar werden kann, wenn die Zusammendrückung hinreichend rasch und stark stattfindet. Dies ist z. B. der Fall, wenn man Eisen durch rasch aufeinander folgende Hammerschläge hämmert, wodurch die Erwärmung bis zu einem solchen Grade getrieben werden kann, daß sie die Haut der Hand versengt, oder wenn man die Luft in den in Fig. 5 bezeichneten Apparat rasch zusammendrückt; in diesem Falle entwickelt sich hinreichende Wärme, um einen am Boden AB befestigten Feuerschwamm a zu entzünden. Wenn hingegen die Zusammen-Drückung langsam stattfindet, so entweicht die Wärme, ohne daß sie fühlbar wird. Umgekehrt nimmt man wahr, daß, wenn

ein Körper durch irgend eine Ursache sein Volumen vermehrt, so erkaltet er und entzieht den ihn umgebenden Körpern die Wärme.

a.) Anwendung der Ausdehnbarkeit der Körper in der Technik. Die Eigenschaft, welche besonders die Metalle besitzen, ihr Volumen durch die Wärme und durch die Compression zu verändern, wird in einer Menge von Fällen in dem Gebiete der Technik mit Vortheil angewendet. So z. B. können geborstene oder ausgebauchte Mauern eines Gebäudes wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht werden, wenn man durch dieselben Eisenstangen zieht, die ausserhalb der Mauern mit Schrauben und Schraubenmuttern versehen sind; diese Stangen werden nun bis zu einem gewissen Grade erwärmt, wodurch sie sich ausdehnen und das Anziehen der Schraubenmuttern gestatten. Hierauf läßt man sie erkalten, wodurch die ausgebauchte Mauer zum Theil eingezogen wird; durch wiederholtes Erwärmen, Anziehen der Schraubenmuttern und Wiedererkalten wird zuletzt die Mauer wieder in ihre ursprüngliche Lage gebracht.

Wenn man auf die Ausdehnbarkeit der Metalle bei dem Bau der Maschinen und unserer Wohnungen Rücksicht nimmt, so vermeidet man eine Menge Fehler. Man wird keinen Theil, der durch seine Ausdehnung schädliche Wirkungen hervorbringen könnte, an beiden Enden befestigen; man wird überhaupt allen Theilen den nothwendigen Spielraum geben, damit sie sich ohne Gefahr ausdehnen und zusammenziehen können u. s. w.

b.) Resultate der Erfahrung über die Ausdehnbarkeit der Körper.

Von 0 Grad bis 100 Grad des Celsius'schen oder von 0° bis 80° des Reaumür'schen Thermometers dehnt sich ein Barren oder Stab, dessen Länge = 1 ist, um folgende Theile der Einheit aus

Stahl	um	0,00124	Theile
Eisen	=	0,00122	=
Kupfer	=	0,00172	=
Messing	=	0,00188	=
Glas	=	0,00087	=

Von einem Grad zu dem andern der gewöhnlichen Scala des Thermometers (vom Gefrierpunct bis zum Siedpunct des Wassers) ist die Verlängerung beinahe constant, aber sie ist es nicht mehr über diese Grenzen hinaus.

Nach den schönen Versuchen Gay-Lussac's beträgt die Ausdehnung des Volumens der Luft und aller Gasarten für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers $0{,}00375 = \frac{1}{266{,}6}$ ihres Volumens, wenn dasselbe bei 0 Grad gleich 1 gesetzt wird und der Druck constant bleibt. Ein Volumen Gas, das bei 0° einen Kubikfuß beträgt, hat bei 60° ein Volumen, das $= 1 + \frac{60}{266{,}6} = 1{,}225$ Kubikfuß ist.

c.) **Begriffe über die innere Beschaffenheit der Körper.** Es folgt aus dem Vorhergehenden, daß die Körper aus undurchdringlichen, untheilbaren Atomen, die so ungemein klein sind, daß sie durch unsere Sinne nicht wahrgenommen werden können, zusammengesetzt sind; daß dieselben durch mehr oder weniger große Zwischenräume, welche nach Umständen hinsichtlich ihrer Größe variren, von einander getrennt sind und daß endlich diese Atome eben sowohl den äussern Ursachen, welche sie einander zu nähern streben, als denjenigen, welche sie von einander zu trennen suchen, widerstehen. Dies führt zu der Voraussetzung, daß zwischen den benachbarten Atomen gegenseitige Wirkungen stattfinden, die man **Attraction** (Anziehung) und **Repulsion** (Abstoßung) nennt.

a.) **Moleculäre (unmeßbare) Attraction und Repulsion.** Die Wirkungen der moleculären Attraction nennt man **Affinität** (Verwandtschaft), **Adhäsion** (Anhängung, Anhaftung) und **Cohäsion** (Zusammenhang, Zusammenhaftung); ihr Vorhandensein gibt sich durch eine unendliche Menge von Zuständen, in denen sowohl die festen

als die flüssigen Körper auftreten, kund. In Betreff der Repulsion ist es augenscheinlich, daß dieselbe, besonders in den Gasarten, deren Molecule sich beständig abstoßen und in allen Richtungen zu entweichen streben, thätig ist. Man nimmt an, daß die den Körpern inwohnende natürliche Wärme die Ursache der moleculären Repulsion ist, und daß ohne diese Wärme alle Körper sich in festem Zustande befinden würden.

b.) Meßbare Attraction. Die so eben betrachtete Attraction und Repulsion findet nur zwischen den benachbarten Moleculen eines Körpers oder in der Berührungsstelle zweier verschiedenen Körper statt. Es gibt aber noch andere Arten von Wirkungen der Attraction, die zwischen Körpern in meßbaren Abständen von einander stattfindet und welche man die allgemeine Schwere oder Gravitation, die magnetischen und elektrischen Anziehungen und Abstoßungen ꝛc. nennt. Die Anziehung, welche die Erde auf die Körper ausübt und welche man die Schwere (Schwerkraft) nennt, ist die einzige, welche uns hier interessirt, weil sie eine wesentliche Rolle auf dem Gebiete der industriellen Mechanik spielt.

6. Von der Schwere und ihren Wirkungen. — Alle Körper, wenn sie nicht mehr unterstützt werden, fallen in einer Richtung zur Erde, welche durch das sogenannte Bleiloth angegeben wird; diese Richtung ist, wie man aus Erfahrung weiß, senkrecht auf der Oberfläche der stillstehenden Wässer, die sich an verschiedenen Theilen der Erdoberfläche befinden, und geht, hinreichend nach unten verlängert, durch den Mittelpunct der Erde. Wenn aber ein Körper, anstatt sich selbst überlassen zu sein, auf irgend eine Weise unterstützt, oder mittelst eines Fadens aufgehangen wird, so drückt er auf dieses Hinderniß und dieser Druck ist eine Folge der Anziehung der Erde, welchen man das Gewicht des Körpers nennt. Die Gewichte verschiedener Körper mißt und bestimmt man mittelst der Instrumente, die unter dem Namen Wagen bekannt sind, von denen wir, so wie von den Eigenschaften, die sie besitzen müssen,

später sprechen werden, wenn wir uns mit den ersten Begriffen der Mechanik bekannt gemacht haben.

a.) Einheit des Gewichtes. Das Gewicht, welches in den verschiedenen Staaten als Einheit angenommen ist, nennt man in Deutschland ein Pfund, in Frankreich ein Gramme.

Ein Pfund wird gewöhnlich in 32 Loth, ein Loth in 4 Quint und ein Quint in 60 Gran getheilt. Zum Wiegen großer Lasten bedient man sich der Centner. In Frankreich sind 1000 Gramme ein Kilogramm und 100 Kilogramm ein metrischer Centner. In diesem Staate theilt man auch das Kilogramm in 2 (metrische) Pfunde, dieses Pfund in 16 Unzen ꝛc.; man muß aber dieses metrische Pfund nicht mit dem alten pariser Pfund verwechseln, welches etwas kleiner ist; denn ein Kilogramm ist gleich 2,0429 pariser Pfund und ein pariser Pfund gleich 0,4895 Kilogrammen.

Die Gewichtseinheit des Pfunds ist jedoch in den verschiedenen deutschen Staaten nicht gleich groß, so ist z. B.

1 bayr. ℔ = 0,99998 östreich. ℔ = 1,19732 preuß. ℔ = 1,23457 engl. ℔
= 1,14401 paris. ℔ = 0,56000 Kilogrammen.

1 östreich. ℔ = 1,00002 bayr. ℔ = 1,19735 preuß. ℔ = 1,23460 engl. ℔
= 1,14404 paris. ℔. = 0,56001 Kilogrammen.

1 preuß. ℔ = 0,83520 bayr. ℔. = 0,83518 östreich. ℔ = 1,03111 engl. ℔
= 0,95548 paris. ℔ = 0,46771 Kilogrammen.

1 engl. ℔ = 0,81000 bayr. ℔ = 0,80998 östreich. ℔ = 0,96982 preuß. ℔
= 0,92664 paris. ℔ = 0,45360 Kilogrammen.

1 paris. ℔ = 0,87412 bayr. ℔ = 0,87410 östreich. ℔ = 1,04660 preuß. ℔
= 1,07916 engl. ℔ = 0,48951 Kilogrammen.

1 Kilogramm = 1,78571 bayr. ℔ = 1,78567 östreich. ℔ = 2,13807 preuß. ℔
= 2,20460 engl. ℔. = 2,04288 paris. ℔

b.) Absolutes und relatives Gewicht. Das Gewicht einer Quantität gegebener Materie ist eine absolute Sache, es ist unveränderlich und folglich die darauf stattfindende Wirkung der Schwere immer dieselbe. Man kann die

äussere Form eines Körpers auf tausenderlei Weise verändern; man kann ihn zertheilen, erwärmen, zusammendrücken ꝛc., sein Gewicht oder das Gesammtgewicht seiner Theile bleibt immer dasselbe, es ist dessen absolutes Gewicht. Dies ist jedoch, wie wir bereits gesehen haben, nicht der Fall mit dem scheinbaren Volumen eines Körpers; dasselbe vermindert sich durch Zusammendrückung, durch Erkältung; es wird vermehrt durch Erwärmung ꝛc. Daraus folgert man, daß die Quantität und das Gewicht der Materie dieses Körpers, welcher in einem gewissen Volumen, z. B. in einem Kubikfuß, enthalten ist, in dem ersten Fall größer, in dem zweiten geringer ist, d. h. das Gewicht eines gegebenen Volumens ist das relative Gewicht dieses Körpers.

c.) Dichtigkeit. Das Gewicht eines Körpers, dessen scheinbares Volumen der Raumeinheit gleich ist, nennt man dessen Dichtigkeit. Das Gold ist dichter als das Eisen, weil ein Kubikfuß Gold mehr wiegt, mehr Materie in diesem Raume hat, als ein Kubikfuß Eisen. Das kalte, das geschlagene Kupfer ist dichter als das erwärmte, das gegossene Kupfer. Man sagt, die Dichtigkeit eines Körpers ist gleichförmig, ist constant oder er ist homogen, wenn das Gewicht seiner Moleculen oder dasjenige von der Summe der unendlich kleinen Volumen, aus denen er zusammengesetzt ist, durchaus dasselbe ist.

d.) Dichtigkeit des Wassers, Festsetzung der Einheit des Gewichtes. Durch sehr sorgfältig angestellte Versuche haben die Physiker gefunden, daß die Dichtigkeit des reinen destillirten Wassers die möglichst größte ist, oder ihr Maximum hat bei einer Temperatur, die ohngefähr 4 Grad über 0 des hunderttheiligen Thermometers (oder 3,2 Grad des Reaumür'schen) ist. Dieses Maximum der Dichtigkeit hat man in Frankreich angewendet, um die Einheit des Gewichtes auf eine unveränderliche Weise, mittelst der Raumeinheit, festzusetzen. Zu diesem Zwecke hat man das Gewicht eines Kubikcentimeter Wassers bei der eben bezeichneten

Temperatur als Gewichtseinheit angenommen und diesem Wasservolumen den Namen Gramme gegeben.
Man nennt ferner ein Volumen,

das 1000 Grammen oder 1 Kilogramm Wasser enthält, ein Liter,
„ 100 Kilogramm Wasser enthält, ein Hektoliter,
„ 1000 „ „ „ eine Tonne (ein Kubikmeter).

In den Anwendungen der industriellen Mechanik auf die Künste und Gewerbe kann man ohne Nachtheil annehmen, daß die Dichtigkeit des gewöhnlichen Wassers gleich 1000 Kilogramm, bei der in unserm Klima wechselnden Temperatur der Luft, sei.

e.) Specifisches Gewicht der Körper. Das Gewicht einer flüssigen oder festen Substanz, deren Volumen der Raumeinheit gleich ist, nennt man ihr eigenthümliches oder specifisches Gewicht. Wenn also die Dichtigkeit des Wassers gleich 1 gesetzt wird, so ist das specifische Gewicht des geschmolzenen Goldes gleich 19,258, weil ein Kubikfuß Gold 19,258mal so viel wiegt als ein Kubikfuß Wasser. Drückt man also die Dichtigkeit (das Gewicht) eines Kubikfußes Wasser in dem landesüblichen Gewicht durch γ aus *), so ist $19{,}258 \times \gamma$ das Gewicht von einem Kubikfuße Gold. Bezeichnet man für irgend einen Körper das specifische Gewicht mit δ, das Gewicht eines Kubikfußes mit Q, so ist allemal

$$Q = \gamma . \delta$$

*) Bei der oben angegebenen Temperatur wiegt
1 bayr. Kubikfuß destillirten Wassers 44,3948 bayr. Pfund.
1 östreich. „ „ „ 56,4054 östreich. „
wofür man in gewöhnlichen Rechnungen die Zahlen 44,4 und 56,4 annimmt.

In Preußen ist der 66te Theil von einem Kubikfuße destillirten Wassers in leerem Raume, bei einer Temperatur von 15° Reaumür gewogen, die Gewichtseinheit oder das Pfund. Folglich wiegt bei der eben angegebenen Temperatur

Tafel der specifischen Gewichte der am häufigsten, in der industriellen Mechanik in Anwendung kommenden, festen und flüssigen Körper. *)

Feste Körper.

		Werthe von δ			Werthe von δ
gewalztes	Platin	22,669	geschmiedetes	Gold	19,362
reines	Platin	19,500	gegossenes	Gold	19,258

1 preuß. Kubikfuß destillirten Wassers 66 preuß. Pfund.

Für irgend ein anderes Maß- und Gewichtsverhältniß wird das Gewicht von einem Kubikfuße destillirten Wassers bei 3,2° Reaumür Temperatur gefunden, wenn man

mit α das Verhältniß des Meters zu dem Pfundgewichte irgend eines Staates, und

„ β „ „ des Kilogrammes zu dem Fußmaße desselben Staates bezeichnet.

Dann sind

$$1000 \text{ Kilogramm} = \gamma . \beta^3 = 1000\ \alpha \text{ Pfund}$$

und hieraus

$$\gamma = 1000\ \frac{\alpha}{\beta^3} \text{ Pfund.} \qquad (1)$$

Bestimmt man mittelst dieses für γ erhaltenen Ausdrucks das Gewicht eines preuß. Kubikfußes Wasser, so findet sich

$$\gamma = 66{,}1003 \text{ preuß. Pfund}$$

d. h. bei der größten Dichtigkeit (bei 3,2 Reaumür) wiegt ein preuß. Kubikfuß Wassers 0,1003 preuß. Pfund mehr als bei 15° Reaumür.

Mittelst derselben Gleichung (1) wird das Gewicht von 1 pariser Kubikfuß destillirten Wassers bei 3,2 Reaumür gleich 70,0242 pariser Pfund gefunden, wofür man bei gewöhnlichen Rechnungen als runde Zahl 70 Pfund annimmt.

*) Will man von einem der, in dieser Tafel benannten Körper das Gewicht (Q) von einem Kubickfuße, in Pfunden ausgedrückt,

geschmolzenes Blei	11,352	Bouteillenglas	2,732
„ Silber	10,474	Krystallglas	2,892
Kupferdraht	8,878	Spiegelglas, engl.	2,450
gegossenes Kupfer	8,788	„ französ.	2,370
ungeschmiedeter Stahl	7,816	Steinkohle, compakte	1,329
Stangeneisen	7,788	Buchenholz	0,852
geschmolzenes Zinn	7,291	Eschenholz	0,745
Gußeisen	7,207	Ulmenholz	0,800
geschmolzenes Zink	6,861	Weiß-Tanne	0,657
Marmor	2,516 bis 2,798	Eis	0,930
Gyps, durchsichtiger	2,310	Lindenholz	0,604
„ undurchsichtiger	2,167	Pappelholz, gewöhnliches	0,383
Glas, böhmisches	2,732	Kork	0,240

Flüssige Körper.

Queckſilber	13,598	destillirtes Wasser	1,000
Schwefelsäure	1,841	Olivenöl	0,915
Salpetersäure	1,218	Leinöl	0,92—0,953
Meerwasser	1,026	absoluter Alkohol	0,792
Milch	1,030	Schwefeläther	0,715

Die Ausdehnung der festen und flüssigen Körper ist für mäßige Veränderungen der Temperatur im Allgemeinen sehr gering, daher kann man sich in den gewöhnlichen Fällen der Praxis der vorstehenden Tafel ohne alle weitere Reduction bedienen und sicher sein, daß kein merklicher Fehler begangen wird.

Wir wollen hier noch die ziemlich genau bestimmten Gewichte eines Kubikmeters der nachbenannten Substanzen beifügen, welche in vielen Fällen mit Nutzen zu gebrauchen sein werden. *) Die Zahlen bezeichnen die Gewichte in Kilogrammen.

---

bestimmen, so ist

$$Q = 1000 \frac{\alpha . \delta}{\beta 3} \text{ Pfund.}$$

*) Wenn für die oben benannten Körper die Zahlen, welche ihr Gewicht in Kilogrammen ausdrücken, allgemein mit p bezeich-

gewöhnlicher Gypsstein	2168
feiner Gyps	2264
Mühlsteine	2484
schwarzer und weißer Marmor	2717
Backsteine, sehr gut gebrannte	2200
Backsteine, gewöhnliche	1500
gewöhnliche Dachziegel	2000
reiner Sand	1900
erdiger „	1700
leichte Pflanzenerde	1400
thonhaltige Erde	1600
lettenartige „	1900
Mauerung aus gewöhnlichen Bruchsteinen von 1700 bis	2300
Kern d. schwersten Eichenholzes	1170
„ des gewöhnlichen	850
Leinöl	940
Repsöl	919
gewöhnlicher Weingeist	837

f.) Gewicht, Dichtigkeit und Druck der Luft und der Gase. — Das Gewicht der festen und flüssigen Körper kann von Jedermann leicht bestimmt werden, dies ist jedoch nicht der Fall mit der Luft und den andern Gasarten. — Hiezu bedarf man einer Maschine, welche unter dem Namen Luftpumpe bekannt ist, und eines gläsernen Ballons, dessen Öffnung mittelst eines Hahns abgesperrt werden kann. Aus diesem wird nun mittelst der Luftpumpe die darin enthaltene Luft ausgepumpt, oder, wie man sich ausserdem noch ausdrückt, in demselben eine Leere erzeugt; nachdem der Hahn geschlossen worden ist, wird er von der Luftpumpe abgenommen und gewogen; hierauf füllt man ihn, indem jener geöffnet wird, mit atmosphärischer Luft wieder an und wiegt ihn abermals. Die Differenz der Gewichte, welche durch das zweimalige Wiegen erhalten wurde, ist das Gewicht des Volumens atmosphärischer Luft, das vor dem zweiten Wiegen in dem Ballon enthalten war. Füllt man diesen, nachdem zuvor eine Leere in ihm erzeugt

---

net werden, so erhält man das Gewicht eines Kubikfußes derselben Substanz in Pfunden ausgedrückt, indem man p mit $\frac{\alpha}{\beta^3}$ multiplicirt (α so wie β drücken die Seite 25 angegebenen Verhältnißzahlen aus).

wurde, mit einem andern Gas und verfährt übrigens, wie so eben angegeben wurde, so erhält man das Gewicht eines ähnlichen Volumens der verwendeten Gasart. Bei dieser so eben erörterten Operation ist vorausgesetzt, daß die Gase, deren Gewichte man bestimmen will, ganz rein sind, daß die Capacität des Ballens, während man mit demselben operirt, sich nicht verändert, und daß die ursprünglich in demselben enthaltene Luft vollständig aus ihm entfernt worden sei u. s. w.; allein in der Wirklichkeit findet dieses alles nicht so statt, und man muß daher zuletzt die deshalb nothwendigen Correktionen mit dem erhaltenen Resultat noch vornehmen. Auf die eben angedeutete Weise hat man aus den zu verschiedenen Jahreszeiten vorgenommenen Wiegungen gefunden, daß ein Kubikmeter atmosphärischer Luft ohngefähr 1,23 Kilogramm wiegt.

g.) Atmosphärischer Druck. Weil die Luft schwer ist, so begreift man leicht, daß die unsern Erdball umgebende Atmosphäre gegen denselben von allen Seiten drückt, und daß die Erdoberfläche ihr gesammtes Gewicht zu tragen habe. Aber auch jede mit der Erdoberfläche parallele Luftschichte hat das ganze Gewicht der über ihr befindlichen Luft zu tragen und preßt mit einem, diesem Gewichte gleichen, Druck die unter ihr befindliche Luft. Man nimmt ferner wahr, daß der auf diese Weise an der Meeresfläche entstehende Luftdruck zu verschiedenen Zeiten nicht derselbe ist, indem die in der Atmosphäre stattfindenden Erscheinungen bald ihre Spannung vermehren, bald vermindern; jedoch kann aus diesen von einander abweichenden Drückungen der Luft für eine, einen Quadratcentimeter große Fläche als Mittelwerth 1,033 Kilogrammen angenommen werden *). Diesen mittlern Druck

*) Der Druck auf einen Quadratmeter beträgt 19830 Kilogramm. Da nun

1 Quadratmeter $= \beta^2$ Quadratfuß und

1 Kilogramm $= \alpha$. ℔ ist,

wenn α und β die Seite 22 erwähnten Verhältnißzahlen be-

nimmt man gewöhnlich als Vergleichungsausdruck an und nennt ihn: Druck der Atmosphäre; man sagt daher oft: Druck einer Atmosphäre, Druck zweier Atmosphären u. s. w. und versteht darunter den Druck von 1,033 Kilogrammen, 2,066 Kilogrammen ꝛc. auf eine Fläche, die einen Quadratcentimeter groß ist.

h.) Messung des Druckes der Luft und der Gase. Barometer. Das Barometer, ein in unsern Tagen allgemein bekanntes Instrument, bietet das bequemste Mittel zur Messung des atmosphärischen Druckes dar. Dasselbe besteht aus einer etwa 3 Fuß langen, an dem einen Ende geschlossenen Glasröhre, die man, nachdem sie mit Quecksilber angefüllt worden ist, mit Behutsamkeit umwendet und mit ihrem offenen abwärts gekehrten Ende in eine ebenfalls mit Quecksilber angefüllte Schaale oder Büchse so einsenkt, daß sie sich in der vertikalen Richtung ac (Fig. 6) befindet. Das in ihr befindliche Quecksilber wird dann zu einer bestimmten Höhe herabsinken und über sich einen leeren Raum bilden. Der Druck, welchen die Luft auf das Niveau des in der Schaale enthaltenen Quecksilbers ausübt, wird durch das Gewicht der Quecksilbersäule acdb, welche sich in der Glasröhre über dem Niveau AB befindet, angezeigt.

---

zeichnen, so ist der Druck der Atmosphäre auf

$$\left.\begin{aligned} 1\ \text{Quadratfuß} &= 10330 \cdot \frac{\alpha}{\beta^2}\ \text{℔} \\ 1\ \text{Quadratzoll} &= \frac{10330}{144} \cdot \frac{\alpha}{\beta^2}\ \text{℔} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Diesen beiden Gleichungen zufolge ist also der an der Meeresfläche stattfindende mittlere Druck auf

1 bayr. Quadratfuß	= 1571 bayr. ℔.	1 bayr. Quadratzoll	= 10,911 bayr. ℔.
1 preuß. „	= 2176 preuß. „	1 preuß. „	= 15,108 preuß. „
1 östreich. „	= 1843 östreich. „	1 östreich. „	= 12,827 östr. „

Die (2. Bd. S. 306) erhaltenen Drückungen der Luft beziehen sich auf einen Fall, wo der Druck nicht unmittelbar an der Meeresfläche stattfindet.

Es ist hier nicht der Platz, die Construktion des Barometers speciell anzugeben, sondern es ist hinreichend zu wissen, daß die Quecksilbersäule in der Glasröhre, welche mit dem mittlern Druck der Atmosphäre an der Meeresfläche übereinkommt, 28 pariser Zoll (ohngefähr 0,76 Meter) hoch ist, weil eine Quecksilbersäule von dieser Höhe und einem Quadratcentimeter Grundfläche 1,033 Kilogramm wiegt. Man ersieht hieraus, daß der Druck der Atmosphäre im Allgemeinen der Höhe der Quecksilbersäule im Barometer proportionirt ist. Wenn man statt des Quecksilbers Wasser zur Bildung eines Barometers verwenden wollte, so müßte die Wassersäule, welche mit dem Druck der Atmosphäre im Gleichgewicht wäre, ohngefähr 32 pariser Fuß (10,33 Meter) hoch sein, weil eine so hohe Wassersäule von 1 Quadratcentimeter Grundfläche ebenfalls 1,033 Kilogramm wiegt.

2.) Manometer. Das Barometer dient auch dazu, den Druck oder die Spannung des in einem Gefäße enthaltenen Gases eben so wie denjenigen der Atmosphäre zu messen. Für diesen Zweck ist es hinreichend, die mit Quecksilber angefüllte Schale oder Büchse in das Innere des Gefäßes zu setzen und die in dasselbe eintauchende Glasröhre durch die obere Wand des Gefäßes luftdicht durchgehen zu lassen (Fig. 7), oder man verschließt die Quecksilberbüchse des Barometers durch einen Deckel und verbindet sie vermittelst einer Röhre mit dem Gefäße (Fig. 8). Diese Apparate, welche man auf sehr verschiedene Weise anordnen kann, nennt man Manometer.

k.) Specifisches Gewicht der Gase. Da man also dem Vorhergehenden zufolge den Druck der Gase zu bestimmen im Stande ist, so kann man, wenn ihre Temperatur durch das Thermometer für jeden besondern Fall gegeben ist, mittelst des Mariottischen und desjenigen von Gay-Lussac aufgefundenen Gesetzes durch eine einfache Rechnung ihr Gewicht und ihre Dichtigkeit bestimmen, wenn man ihr Gewicht und ihre Dichtigkeit unter gewissen Umständen, z. B. für 0° Temperatur und 28 pariser Zoll (76 Centimeter) Barometerhöhe kennt. Nachstehende Tafel gibt für

diese Temperatur und diese Barometerhöhe die Dichtigkeiten und Gewichte der hauptsächlichsten Gasarten an.

Tafel

der Dichtigkeiten und der Gewichte der hauptsächlichsten Gase,

die Dichtigkeit des Wassers = 1 angenommen.

Namen der Flüssigkeiten.	Dichtigkeit oder specif. Gew.	Gewicht bei 0° Temperatur und 28 par. Zoll Barometerstand von			
		1 Kubikmeter in Kilogram.	1 bayr. K. Fuß in bayr. Pf.	1 preuß. K. Fuß in prß. Pf.	1 östr. K. Fuß in östr. Pf.
Atmosphärische Luft	1,0000	1,2991	0,0576	0,0858	0,0732
Kohlensaures Gas .	1,5245	1,9805	0,0877	0,1309	0,1117
Sauerstoff-Gas . .	1,1026	1,4323	0,0635	0,0946	0,0807
Stick-Gas	0,9757	1,2675	0,0562	0,0837	0,0714
Wasserstoff-Gas . .	0,0688	0,0894	0,0039	0,0059	0,0050
Wasserdampf . . .	0,6235	0,8100	0,0359	0,0635	0,0456

Die Gase, indem sie sich für gleiche Erhöhungen der Temperatur gleichmäßig ausdehnen und für gleiche Zunahmen des Druckes gleichmäßig comprimiren, behalten dasselbe Verhältniß ihrer Dichtigkeiten für jeden Druck und jede Temperatur (innerhalb der früher bezeichneten Grenzen); das Wasserstoffgas, dessen Dichtigkeit 0,0688 oder ohngefähr $\frac{1}{15}$ von derjenigen der atmosphärischen Luft bei 0° Temperatur und 0,76 Meter Barometerstand beträgt, wird immer $\frac{1}{15}$ bleiben, wenn man diese beiden Gase, z. B. bei 100° Temperatur und unter einem 10mal größern Druck (oder bei 10 Atmosphären) betrachtet.

Die Dichtigkeiten und die Gewichte der Gase, welche in vorstehender Tafel angegeben sind und die auf den Seiten 25 und 26 zusammengestellten specifischen Gewichte der flüssigen und festen Körper sind diejenigen, welche man erhalten würde, wenn diese Körper im leeren Raume gewogen worden wären.

Indem wir diese allgemeinen Betrachtungen über die physischen Eigenschaften der Körper schließen, fügen wir noch die Bemerkung bei: daß wir keineswegs im Vorstehenden eine vollständige Aufzählung derselben, nach den Modificationen, welche die Körper in verschiedenen Umständen erleiden, geliefert haben. Zum bessern Verständniß des Nachfolgenden ist das Vorhergehende unumgänglich nothwendig und was wir über die physischen Eigenschaften der Körper noch weiter zu sagen haben, werden wir an geeigneter Stelle später einschalten.

II.

Vorläufige Begriffe über die Bewegung, die Kräfte und deren Wirkungen.

7. Raum. — Der Raum ist die unbestimmte Ausdehnung ohne Grenzen, in welchen sich alle Körper befinden und jeder einen mehr oder minder beträchlichen Theil desselben einnimmt, den man sein Volumen, seine Ausdehnung und zuweilen auch seine Capacität nennt.

Oft nennt man auch das Volumen eines Körpers, oder dessen Oberfläche, und zuweilen auch den zwischen zwei Körpern stattfindenden Abstand Raum, der dann als ein gewisser Theil des absoluten unbegrenzten Raumes betrachtet wird, und in diesem Sinne genommen nichts Unbestimmtes ausdrückt.

8. Zeit, Maß derselben. — Es ist augenscheinlich, daß eine Zeit, die während der Dauer einer Erscheinung verfließt, größer, kleiner, oder eben so groß als eine gegebene sein kann. Jene ist also eine Größe, die man eben so, wie Linien, Flächen oder Volumen messen kann, wenn man zuvor gleiche Zeiten, die ohne Unterbrechung auf einander folgen, zu erlangen sucht. Ein Körper, der von einer gewissen Höhe auf eine horizontale Ebene herabfällt, gebraucht hiezu immer dieselbe Zeit, und wenn mehrere gleiche Körper durch dieselbe Höhe fallen, so wird jeder für sich ebenfalls dieselbe Zeit gebrauchen. Nehmen wir nun an, daß in dem Augenblick, wo der erste dieser Körper in der Ebene anlangt, der zweite zu fallen beginnt, alsdann wenn dieser in der Ebene angekommen ist, der dritte anfängt zu fallen und so nach und nach alle übrigen Körper, so haben wir einen Begriff von der Folge gleicher Zeiten, und die Summe derselben

drückt die totale Zeit aus, welche verfließt, bis sämmtliche Körper herabgefallen sind. Wird jetzt eine dieser gleichen Zeiten als Einheit angenommen, so kann man die Zeit, welche sämmtliche Körper zu ihrem Herabfallen gebrauchten, so wie jede andere durch eine Zahl ausdrücken.

Um gleiche aufeinander folgende Zeiten zu messen, bedienten sich die Alten der Wasseruhren und der Sanduhren; wir messen heut zu Tage dieselben ungleich bequemer und genauer mit unsern bekannten Pendel- und Taschenuhren.

Eintheilung der Zeit. Die kleinsten Theile der Zeit, welche unsere gewöhnlichen Uhren angeben, sind die Sekunden; 60 Sekunden nennen wir eine Minute, 60 Minuten eine Stunde und 24 Stunden einen Tag. Das Jahr oder die Zeit, welche verfließt, bis die Erde einen Umlauf um die Sonne vollbracht hat und sich wieder in der ursprünglichen relativen Lage zu dieser befindet, besteht aus 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Minuten und 50,832 Sekunden. Im bürgerlichen Leben rechnen wir jedes gewöhnliche Jahr zu 365 Tagen und schalten bei jedem folgenden vierten Jahre, um die Bruchtheile des Tages beiläufig auszugleichen, einen Tag ein, und nennen ein solches, aus 366 Tagen bestehendes Jahr, ein Schaltjahr.

Die Unterabtheilungen der Stunde bezeichnen wir mit Strichen, die wir oberhalb der Zahlen rechts beisetzen, und zwar die Minuten mit einem Strich, die Sekunden mit zwei Strichen. Ebenso bezeichnen wir die Stunden mit St. und die Tage mit Tg. z. B.

$9^{\text{Tg.}}\ 7^{\text{St.}}\ 43'\ 26''$

wird gelesen 9 Tage, 7 Stunden, 43 Minuten und 26 Sekunden.

Zuweilen drücken wir auch die Zeit durch Linien aus, indem wir eine Linie von bestimmter Größe als Zeiteinheit (Sekunde) annehmen.

9. **Ruhe.** — Ein Körper ist in Ruhe, wenn er an derselben Stelle des Raumes fortwährend verbleibt; es giebt vielleicht in dem ganzen Universum keinen Körper, der

sich in absoluter Ruhe befindet; denn da sich unser Erdball ununterbrochen um sich selbst und zugleich um die Sonne bewegt, so ist auf demselben kein Körper vorhanden, den man in dem Zustande einer absoluten Ruhe betrachten könnte. Die Ruhe ist also nur relativ. Ein Körper ist für uns in Ruhe, wenn er in Bezug auf andere Körper, die wir als unveränderlich an ein und demselben Ort verbleibend betrachten, seine Stellung nicht verändert. Ein in einem stromauf- oder abwärtsfahrenden Schiffe hingestellter Körper ist in Bezug auf dasselbe in Ruhe, obgleich er sich in Bezug auf die Ufer in Bewegung befindet.

10. Bewegung. — Ein Körper ist in Bewegung, wenn er nach und nach verschiedene Stellungen in dem Raum einnimmt. Die Bewegung ist relativ, wie die Ruhe; denn ein Körper ist für uns nur in Bewegung, wenn er seine Stellung in Bezug auf andere Körper, die wir als unverändert an demselben Orte verbleibend annehmen, fortwährend verändert.

Die Bewegung eines Körpers kann nur nach dem Gesetze der Stetigkeit stattfinden, d. h. ein Körper kann von einer Stelle zu einer andern auf keine andere Weise gelangen, als daß er nach und nach alle diejenigen Stellen, die dazwischen liegen und durch seine Bahn bezeichnet sind, einnimmt; daher beschreibt ein in Bewegung befindlicher Punkt nothwendigerweise eine stetige, ununterbrochene Linie. Wenn man von dem beschriebenen Wege eines Körpers spricht, so versteht man darunter nichts anders als die stetige Linie, welche ein dem Körper angehöriger oder mit ihm vereinigter Punkt während dessen Bewegung durchläuft.

11. Verschiedene Arten der Bewegung. — Die Bewegung eines Punktes nennt man geradlinig oder krummlinig, je nachdem der beschriebene Weg eine gerade oder eine krumme Linie ist. Ist die Bewegung krummlinig, so kann man dieselbe so betrachten, als ob sie in einem vielseitigen Polygon stattfände, dessen Seiten

so ungemein klein sind, daß sie mit den zugehörigen Bögen der Kurve beinahe zusammenfallen, oder der Unterschied zwischen ihnen so unerheblich ist, daß, wenn er unbeachtet gelassen wird, dadurch kein merklicher Fehler entsteht. Die unbestimmt verlängerten Seiten dieser Polygone sind dann wirkliche Tangenten der Kurve, welche die mit den Berührungspunkten correspondirenden Richtungen der Bewegung angeben.

Wir wollen nun, um uns einen Begriff von den verschiedenen Arten der Bewegung machen zu können, annehmen, daß die ganze Zeit, welche ein Punkt gebraucht, um von einer gegebenen Stelle in eine andere zu gelangen, in eine sehr große Anzahl gleicher Theile, z. B. in hunderttausend Theile einer Sekunde, getheilt sei. Sind nun die Stücke der in diesen ungemein kleinen Zeittheilchen durchlaufenen Wege alle einander gleich, so sagt man: die Bewegung des betrachteten Punktes ist gleichförmig; wenn aber dieselbe in jedem solchen Zeittheilchen eine Wegstrecke zurücklegt, die sowohl von der, in den vorhergehenden, als von der, in den nächstfolgenden Zeittheilchen durchlaufenen verschieden ist, so sagt man: die Bewegung ist ungleichförmig oder veränderlich; und zwar nennt man dieselbe beschleunigt, wenn die in den darauffolgenden Zeittheilchen durchlaufenen Wege immer größer und größer werden; hingegen verzögernd, wenn diese Wege in denselben Zeiten immer kleiner und kleiner werden. Die Bewegung des Minutenzeigers einer Uhr, die rotirende Bewegung der Erde um ihre Axe, der Lauf des Wassers in einem regulären Kanal sind Beispiele der gleichförmigen Bewegung. — Ein Körper, welcher vertikal herabfällt, bietet ein Beispiel der beschleunigten, und ein Körper, der vertikal aufwärts geworfen wird, ein Beispiel der verzögernden Bewegung dar.

12. Geschwindigkeit. — In allen den so eben betrachteten Fällen wird die Bewegung entweder rascher oder langsamer stattfinden, je nachdem der in einem ungemein

kleinen Zeittheilchen durchlaufene Weg größer oder kleiner ist; derselbe mißt die Intensität der Geschwindigkeit, die in demselben Augenblick stattfindet. Man nimmt nun leicht wahr, daß bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit constant, bei der ungleichförmigen hingegen entweder beschleunigend oder verzögernd ist.

13. Gleichförmige Bewegung. — Diese Bewegung ist unter allen die einfachste, indem die in den kleinen Zeittheilchen durchlaufenen Wege alle einander gleich sind; es ist daher leicht einzusehen, daß der in irgend einer Zeit zurückgelegte Weg aus so vielen gleichen Theilen zusammengesetzt ist, als Zeittheilchen verfließen, während er zurückgelegt wird. Es werden also bei der gleichförmigen Bewegung gleiche Wege in gleichen Zeiten beschrieben; jene nehmen, wie diese, zu, oder sind den letztern proportional; daher ist das Verhältniß eines jeden zurückgelegten Weges zu der dazu verwendeten Zeit für eine gegebene gleichförmige Bewegung constant. — Bezeichnen wir mit S und s die Wegeinheiten, welche ein Punkt in den Zeiteinheiten T und t zurücklegt, so hat man dem Vorhergehenden zufolge

$$S : s = T : t$$

oder

$$S : T = s : t$$

daher auch

$$\frac{S}{T} = \frac{s}{t} \qquad (a)$$

und das Verhältniß S zu T oder s zu t ist während der Dauer einer gleichförmigen Bewegung dasselbe.

14. Maß der gleichförmigen Geschwindigkeit. — Der so eben bewiesenen Eigenschaft der gleichförmigen Bewegung zufolge erhält man den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg, wenn man in (13. a) $t = 1$; setzt dann drückt augenscheinlich s den in der Zeiteinheit zurückgelegten, in Längeneinheiten ausgedrückten, Weg aus. Wir nennen denselben die Geschwindigkeit des betrach-

teten Punktes und bezeichnen ihn mit V, dann ist

$$\frac{S}{T} = V \qquad (\beta)$$

hieraus

$$S = T \cdot V \qquad (\gamma)$$

und

$$T = \frac{S}{V} \qquad (\delta)$$

d. h. bei gleichförmiger Bewegung erhält man:

1.) die Geschwindigkeit, wenn man den zurückgelegten Weg durch die indessen verflossene Zeit dividirt;

2.) den zurückgelegten Weg, wenn man die indessen verflossene Zeit mit der Geschwindigkeit multiplicirt;

3.) die verflossene Zeit, wenn man den während ihrer Dauer zurückgelegten Weg durch die Geschwindigkeit dividirt.

15. Periodische Bewegung, mittlere Geschwindigkeit. — In der Praxis findet gar oft der Fall statt, daß die Geschwindigkeit eines in Bewegung befindlichen Körpers nicht in allen Lagen genau dieselbe ist, obgleich die von ihm in gewissen Zeitabschnitten durchlaufenen Wege einander gleich sind. Alle in oscilirender (schwingender) oder in hin- und hergehender Bewegung sich befindenden Körper, die in den mannigfachsten Modificationen bei den Maschinen auftreten, besitzen die Eigenthümlichkeit, daß ihre Geschwindigkeit in jedem folgenden Augenblick eine andere ist, daß sie aber ihre Schwingung oder ihre wechselseitige Bewegung immer in derselben Zeit vollbringen, z. B. ein durch eine Kurbel in Bewegung gesetzter Pumpenkolben besitzt in jedem folgenden Augenblick eine andere Geschwindigkeit, als in dem vorhergehenden, und seine Bewegung ist daher bald beschleunigend, bald verzögernd, obgleich er die Länge des Pumpenstiefels immer in derselben Zeit durchläuft. Eben so ungleichförmig ist die Bewegung der Erde um die Sonne, obgleich sie einen ganzen Umlauf um diese immer in derselben Zeit

— innerhalb eines Jahres — vollbringt. Solche Bewegungen nennt man periodische, und um sie der Betrachtung besser unterstellen zu können, nimmt man statt derselben eine mittlere gleichförmige Bewegung an, die in derselben Zeit wie die periodische vollbracht wird. Die constante Geschwindigkeit, welche dieser Annahme zu Grunde liegt, ist eine mittlere Geschwindigkeit, die man erhält, wenn der in einer ganzen Periode durchlaufene Weg durch die indessen verflossene Zeit dividirt wird; diese mittlere Geschwindigkeit muß man jedoch nicht mit der wirklichen, in jedem Augenblick stattfindenden Geschwindigkeit, die veränderlich ist, verwechseln. So z. B. haben die Astronomen statt der wirklichen Erde, die in ihrem Lauf um die Sonne sich bald schneller, bald langsamer bewegt, und folglich ihre Geschwindigkeit stets ändert, eine eingebildete Erde angenommen, die in derselben Zeit wie jene ihren Umlauf um die Sonne vollendet, aber sich mit constanter Geschwindigkeit bewegt. Durch diese Annahme sind die Zeiten, die von einem Mittag bis zu dem andern verfließen, gleich groß, man nennt sie mittlere Zeit, und gute Uhren geben dieselbe genau an; die Zeiten, welche von einem Mittage zum andern bei der wirklichen Bewegung der Erde um die Sonne verfließen, sind sich nicht gleich, man nennt sie wahre Zeit; dieselbe wird durch unsre Sonnenuhren und zuweilen auch mittelst eines mit unsern Pendeluhren in Verbindung gebrachten künstlichen Mechanismus angegeben.

16. Geometrische Darstellung der Bewegungsgesetze. — Wenn wir das Gesetz einer gewissen Bewegung, von der man die Verhältnisse zwischen den zurückgelegten Wegen und den verflossenen Zeiten kennt, geometrisch darstellen wollen, so ziehe man eine gerade Linie **Ox** (Fig. 9) und trage auf diese von **O** aus eine beliebige Anzahl gleicher Theile **Oa, ab, bc....** von denen wir annehmen, daß sie bestimmte Zeittheile, z. B. Zehntel-Sekunden oder Hundertel-Sekunden ꝛc. vorstellen. Ferner trage man auf eine andere Linie $\alpha\omega$ eine gewisse Größe $\alpha\beta$ so oft-

mal, als man es für den vorliegenden Fall für nöthig erachtet, und betrachte einen solchen Theil $\alpha\beta$ oder $\beta\gamma$ ꝛc. als die Größe des Weges, der in einem ungemein kleinen Zeittheilchen zurückgelegt wird. Diese so eingetheilte Linie $\alpha\beta\gamma$.... stellt nun den Maßstab dar, von welchem die Größen der in gewissen Zeiten zurückgelegten Wege abgenommen werden können. Nun errichte man in den Punkten a, b, c... Senkrechte aa', bb', cc'... zu der Linie Ox und trage von a nach a', von b nach b', von c nach c' u. s. w. die von dem Maßstabe $\alpha\omega$ abgenommenen Größen der in den Zeittheilen Oa, Ob, Oc... zurückgelegten Wege. Auf diese Weise erhält man eine Folge von Punkten a', b', c'... von denen sich je zwei und zwei durch gerade Linien verbinden lassen und somit das Polygon a'b'c'... darstellen. Liegen die so erhaltenen Punkte äusserst nahe aneinander, d. h. hat man die Zeittheile sehr klein angenommen, so geht dieses Polygon in eine Kurve über, welche nun das Gesetz der stattfindenden Bewegung oder das Verhältniß zwischen den verflossenen Zeiten und zurückgelegten Wegen ausdrückt.

Die Linien Oa, Ob, Oc.... nennt man gewöhnlich die Abscissen, den Punkt O den Ursprung oder Anfang derselben, die Linie Ox die Abscissen-Axe und die Linien aa', bb', cc'... die Ordinaten; beide zusammen, die Abseissen und Ordinaten, begreift man unter der Benennung: Coordinaten der Kurve. Den Abstand (cd) zwischen zwei benachbarten Ordinaten (cc', dd') oder die Differenz ihrer Abscissen nennt man zuweilen den Zuwachs oder die Zunahme der Abscissen, so wie den Unterschied in der Länge zweier benachbarten Ordinaten, wie z. B. die Größe d'd'', die Zunahme oder Abnahme der Ordinaten, je nachdem nämlich ihre Größe in Bezug auf ihren Abstand von dem Ursprung O zu- oder abnimmt. Wenn die aufeinanderfolgenden Punkte a'. b', c'.... ungemein nahe aneinander liegen, so kann die Gerade, welche zwei so benachbarte Punkte miteinander verbindet, mit dem zwischen ihnen liegenden Bogen der Kurve verwechselt werden, und einen

solchen Kurventheil nennt man dann ein Kurven-Element, weil man die ungemein kleinen Theile einer Größe mit dem Namen Elemente zu belegen pflegt; liegen die Punkte a', b', c' ... so nahe, wie oben angenommen wurde, aneinander, so sind die durch die Linien ab, bc, cd .... dargestellten Zeittheile ebenfalls ungemein klein, und in diesem Falle werden diese „Zeitelemente" genannt.

a.) Darstellung der gleichförmigen Bewegung. Bei dieser Bewegung nehmen die zurückgelegten Wege, wie die indessen verflossenen Zeiten zu, d. h. die Ordinaten aa', bb', cc' .... (Fig. 10) sind den Abscissen Oa, Ob, Oc... proportional und die Linie a'b'c'..., welche das Gesetz der Bewegung ausdrückt, ist eine Gerade. Denn nehmen wir an, daß ein Theil der Abscissenaxe oder eine gewisse Zeit in eine unendliche Anzahl gleicher, ungemein kleiner Theile getheilt, in den Theilpuncten die correspondirenden Ordinaten errichtet und dann aus ihren Endpunkten von einer Ordinaten zur andern Parallelen mit der Abscissenaxe gezogen worden sind, so hat man eine Folge von sehr kleinen rechtwinkeligen Dreiecken — von denen z. B. c'd'd'' eines ist — gebildet, die den Dreiecken Oaa', Obb', Occ' .... ähnlich und also die Seiten von jenen den Seiten von diesen proportional sind. Man nimmt nun leicht wahr, daß die Höhen dieser kleinen Dreiecke den in einem Zeitelement beschriebenen Weg messen, da aber diese Wege alle einander gleich sind, und dieselben zugleich die Intensitäten der Geschwindigkeiten in verschiedenen Punkten a', b', c'... ausdrücken, so folgt daraus, daß diese constant ist, und wenn z. B. Oe die Zeiteinheit ist, so wird ee' den in ihr durchlaufenen Weg oder die Geschwindigkeit bezeichnen.

b.) Darstellung der veränderlichen Bewegung. Bei dieser Bewegung sind die zurückgelegten Wege nicht mehr den indessen verflossenen Zeiten proportional, die Linie a'b'c... (Fig. 11) ist daher nicht mehr eine Gerade, sondern eine Kurve, denn die in den Zeitelementen ab, bc... beschriebenen kleinen Wege b'b'', c'c''... sind nicht mehr

einander gleich, und folglich verändert sich die Geschwindigkeit von einem Augenblick zum andern. Für den in der Figur dargestellten Fall ist die Bewegung oder die Geschwindigkeit eine beschleunigende, weil die in den Zeitelementen ab, bc... beschriebenen Wege b'b'', c'c'' fortwährend wachsen. Nehmen wir jetzt an, daß die Beschleunigung in irgend einem Punkt, z. B. in c', plötzlich aufhöre, so wird von diesem Augenblick an die Bewegung gleichförmig werden, und das Gesetz dieser mit einemmale geänderten Bewegung ist durch die an dem Punkte c' der Kurve gezogene Tangente c'm ausgedrückt. Die Geschwindigkeit dieser gleichförmigen Bewegung ist dieselbe, welche in der Stelle c' und zwar in dem Augenblick, wo die Beschleunigung aufhörte, stattfand. Man erhält diese, wenn man durch den Punkt c' eine Parallele mit der Abscissenaxe zieht, c'n der Zeiteinheit gleich macht und in n eine Senkrechte zu c'n errichtet. Das Stück dieser zwischen c'm und c'n enthaltenen Linie drückt die Größe der Geschwindigkeit in c' aus *), wie man sich durch die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke c'd'd' und c'mn überzeugen kann. Wenn die Bewegung eine beschleunigende ist, so wird die Kurve, welche das Gesetz der Bewegung ausdrückt, gegen die Abscissenaxe convex sein, weil die in den aufeinander folgenden Zeitelementen beschriebenen Wege immer größer und größer werden; ist hingegen die Bewegung eine verzögernde,

---

*) Überhaupt dient diese graphische Darstellung der Bewegungsgesetze dazu, die augenblickliche Geschwindigkeit eines, durch die verflossene Zeit und durch den beschriebenen Weg gegebenen Punktes mittelst Construktion bestimmen zu können; denn man darf nur in dem so gegebenen Punkt a' (Fig. 12) eine Tangente a'm an die Kurve AB und mit der Abscissenaxe Ox eine Parallele a'n ziehen, auf diese von a' nach n die von dem Maßstabe für die Zeiten abgenommene Zeiteinheit tragen und in n zu a'n eine Senkrechte errichten, so wird letztere, auf dem für die Wege angenommenen Maßstabe gemessen, die Größe der in a' stattfindenden Geschwindigkeit angeben.

so findet das Umgekehrte statt und die Kurve wird gegen die Abscissenaxe concav sein. In letzterem Falle wird die Geschwindigkeit für irgend einen Punkt auf dieselbe Weise, wie im vorhergehenden angegeben wurde, bestimmt (siehe Fig. 13). Ist die Bewegung zuerst beschleunigt und nachher verzögert, so wird das Gesetz dieser Bewegung durch eine Kurve ausgedrückt, deren einer Theil gegen die Abscissenaxe convex und deren anderer gegen dieselbe concav ist, wie es Fig. 14 zeigt.

Endlich stellt die Figur 15 noch das Gesetz einer constanten periodischen Bewegung dar. Die gegen die Abscissenaxe convexen Theile A der Kurve stellen das Gesetz der beschleunigten, und die gegen dieselbe concaven Theile B das der verzögerten Bewegung dar, während die Gerade a'b'c' ... dasjenige der mittlern Bewegung ausdrückt.

Daß die Kurven in den bisherigen Darstellungen nicht die Bahnen, in denen sich ein Punkt oder ein Körper bewegt, darstellen, sondern nur das Gesetz der Bewegung oder die Relation zwischen den verflossenen Zeiten und beschriebenen Wegen ausdrücken, wird kaum nöthig sein, zu bemerken.

17. Trägheit der Materie. — Die Materie ist leblos oder träge, weshalb sie sich weder durch sich selbst in Bewegung versetzen, noch diejenige, welche ihr durch eine äussere Ursache eingedrückt wurde, verändern kann. Ein in Ruhe befindlicher Körper verbleibt in diesem Zustande, so lange ihn nicht eine äussere Einwirkung wie z. B. die Schwere oder irgend eine bewegende Kraft aus demselben bringt. Wird er nach einer gewissen Richtung ab (Fig. 16) in Bewegung gesetzt, so verharrt er in derselben, indem kein Grund vorhanden ist, warum er dieselbe, z. B. in b angekommen, verlassen soll. Gleichermassen behält er die ihm im Anhange seiner Bewegung eingedrückte Geschwindigkeit so lange unverändert bei, bis irgend eine andere Ursache dieselbe verzögert oder beschleunigt. Wenn ein im Raume sich selbst überlassener Körper vertikal abwärts fällt und seine Bewegung sich fortwährend beschleunigt, so ist dies die Wirkung

einer äussern Ursache, der Schwere, welche ununterbrochen auf alle Körper wirkt, gleichviel, ob dieselben sich in Ruhe oder in Bewegung befinden. Ein in schiefer Richtung geworfener Stein verändert jeden Augenblick seine Richtung und beschreibt eine Kurve, was ebenfalls eine Wirkung der Schwere ist, die ihn ohne Aufhören abwärts gegen die Erde zu treiben sucht. Wenn diese Einwirkungen der Schwere auf die eben betrachteten Körper nicht stattfänden, so würde der Erstere unverändert an seiner Stelle verbleiben und der letztere in der geraden Richtung, in der er geworfen wurde, sich fortbewegen.

Gesetz der Trägheit. Aus dem Vorhergehenden folgt nun: daß ein mit einer gewissen Geschwindigkeit und in gegebener Richtung sich bewegender Körper in Folge der Trägheit diese Geschwindigkeit und diese Richtung immerwährend oder so lange beibehalten wird, bis irgend eine äussere Einwirkung eine Umänderung seiner Bewegung veranlaßt; wenn daher ein Körper durch irgend eine Ursache gezwungen ist, eine Kurve **AB** (Fig. 17) zu beschreiben, und dieselbe in einem gewissen Augenblick mit einemmale aufhört, auf ihn einzuwirken, so wird er in Folge der Trägheit sich von diesem Augenblick an in der, an dem Punkte **B** gezogenen Tangente **BC** mit derjenigen Geschwindigkeit, die er in dem Punkte **B** besitzt, gleichförmig fortbewegen.

18. **Kräfte.** — Die Ursache, welche den Zustand eines Körpers wirklich verändert oder ihn ändern würde, wenn andere entgegenwirkende Ursachen es nicht verhinderten, nennt man im Allgemeinen Kraft. Die Anziehung, die Schwere, der Widerstand der Flüssigkeiten, die Reibung, die Wärme als Ursache der Repulsion betrachtet ꝛc., sind wirkliche Kräfte, weil sie den Zustand der Ruhe oder der Bewegung eines Körpers zu ändern vermögen. Ohngeachtet die Wirksamkeit einer Kraft nicht allemal augenscheinlich wahrnehmbar ist, so kann sie dennoch thätig sein, weil in solchen Fällen gewöhnlich andere entgegenwirkende Ursachen ihre Thätigkeit aufheben. Ein Körper, der z. B. auf einer hori-

zontalen Tafel liegt, oder mittelst eines Fadens aufgehangen ist, scheint durch die Einwirkung der Schwere keine Veränderung in seinem Zustande zu erleiden, obgleich sie ihn unausgesetzt gegen die Tafel preßt oder fortwährend den Faden spannt; denn sowie jene entfernt oder dieser getrennt wird, folgt der Körper augenblicklich der Einwirkung dieser Kraft und fällt abwärts.

19. Verschiedene Wirkungen der Kräfte. — Die Kräfte bringen je nach den Umständen sehr verschiedene Wirkungen hervor. Sie veranlassen zuweilen, daß ein Körper in Ruhe verbleibt, indem sie die Wirkungen anderer, an demselben angebrachter Kräfte vernichten; oft verändern sie seine Gestalt, oder zerreißen oder zerdrücken ihn; sie versetzen einen in Ruhe befindlichen Körper in Bewegung, oder wenn er sich schon in diesem Zustande befindet, so suchen sie mitunter dieselbe zu beschleunigen oder zu verzögern oder verändern seine Richtung; zuweilen finden diese Einwirkungen so langsam statt, daß sie kaum bemerkbar sind; ein andermal so schnell und plötzlich, daß die dazu verwendete Zeit kaum für uns wahrnehmbar ist, obgleich jede noch so mächtige Wirkung einer Kraft, dem Gesetz der Stetigkeit zufolge, immer nur in einer endlichen Zeit stattfinden kann. Eine abgeschossene Kugel, welche eine Thür, eine Glastafel oder ein frei aufgehangenes Papierblatt durchdringt, ohne diesen Körpern eine merkliche Bewegung mitzutheilen, beweist nichts anderes, als daß die Durchdringung so schnell erfolgte, daß die abgerissenen Theile in dieser kurzen Zeit nicht im Stande waren, die ihnen eingedrückte Bewegung den Körpern, von denen sie Bestandtheile sind, mitzutheilen. Ist eine Kanone, mittelst welcher eine Kugel abgeschossen wird, an Seilen frei aufgehangen, so trifft die Kugel eben so sicher ihr Ziel, als ob die Kanone auf ihrer Lafette läge; die Kanone verrückt sich also in der kurzen Zeit nicht, in welcher die Kugel den Lauf passirt, und es folgt daraus, daß, um jene in eine merkliche Bewegung zu versetzen, hiezu eine längere Zeit erforderlich ist. In dem

Nachfolgenden werden wir nun untersuchen, wie sich in der ganzen Ausdehnung eines Körpers die Bewegung allmählig und auf eine continuirliche Weise fortpflanzt, und warum diejenigen Körper, welche ein größeres Gewicht oder eine größere Dichtigkeit haben, durch die Einwirkung einer bestimmten Kraft in einer gegebenen Zeit eine geringere Geschwindigkeit mitgetheilt erhalten.

Die Kräfte, welche die Körper in wirkliche Bewegung versetzen, nennt man im Allgemeinen bewegende Kräfte; und zwar beschleunigende, wenn sie die Geschwindigkeit in jedem Zeitelement vergrößern; hingegen verzögernde, wenn sie jene in jedem Zeitelement vermindern. Zuweilen nennt man jene kurzweg Kräfte, und diese Widerstände. Demgemäß wären die beschleunigenden Kräfte wirkliche Kräfte, und die verzögernden Kräfte Widerstände. Überhaupt nennt man Kraft jede Ursache, welche eine gewisse Wirkung zu erzeugen im Stande ist, und Widerstand diejenige, welche sich dieser Wirkung entgegensetzt, oder sie zu vernichten sucht.

20. Natur und Vergleichung der Kräfte. — Wir gewinnen durch uns selbst eine ziemlich genaue Vorstellung von der Art, wie die Kräfte wirken; denn stoßen oder ziehen wir irgend einen freien oder einen durch Hindernisse zurückgehaltenen Körper, so haben wir das Gefühl eines Druckes oder eines Zuges, oder überhaupt eines solchen, das wir beim Aufheben eines Gewichtes empfinden. Die Kräfte sind also für uns wirkliche Drückungen, die man mit Gewichten vergleichen kann. Diese Drückungen können bald schwächer, bald stärker sein und lassen sich somit als Größen betrachten, die durch Zahlen ausgedrückt werden können, wenn man irgend einen Druck, z. B. den ein Pfund oder ein Kilogramm hervorbringt, als Einheit angenommen hat.

Zwei Kräfte sind einander gleich, wenn die eine statt der andern, in denselben Umständen substituirt, die nämliche Wirkung hervorbringt,

oder eine dritte, in entgegengesetzter Richtung angebrachte Kraft zerstört.

21. Messung der Kräfte durch die Gewichte. — Die Gewichte können, wie Jedermann weiß, mittelst der Wa . miteinander verglichen werden. Vermöge der im vorigen Paragraphen angegebenen Eigenschaft der gleichen Kräfte ist es nun leicht, mittelst jeder Wage, selbst mit einer fehlerhaft construirten, das wirkliche Gewicht eines Körpers zu finden; denn es ist für einen solchen Fall hinreichend, den Körper unter denselben Umständen wie die Gewichte mit der Wage in Verbindung zu bringen, und man kann sicher sein, daß das Gewicht des Körpers der Summe der verwendeten Gewichtseinheiten gleich ist. *) Unter dieser Voraussetzung dient also jeder Apparat, der zum Messen der Gewichte geeignet ist, auch zum Messen der Kräfte.

Die Federn, welche lange Zeit ihre Elasticität unverändert behalten, sind unter denjenigen Vorrichtungen, die

---

*) Hätte man z. B. eine doppelarmige Wage, deren Arme jedoch ungleich und deren Verhältnisse zueinander unbekannt wären, die aber den hinreichenden Grad der Empfindlichkeit besäße, so kann dennoch mit derselben auf folgende Weise das Gewicht eines gegebenen Körpers genau bestimmt werden. Man bringt nämlich zuerst den Körper mit dem einen Arme in Verbindung und belastet den andern Arm so lange, bis der Wagbalken eine horizontale Lage angenommen hat; nimmt man hierauf, ohne etwas in den angehängten Belastungen des andern Armes zu verändern, den Körper wieder weg und bringt statt dessen eine Anzahl Gewichtseinheiten — und wenn es nothwendig erscheint, auch Bruchtheile derselben — an, und zwar so viele, bis endlich der Wagbalken seine zuvor innengehabte horizontale Lage wieder angenommen hat, so werden diese angehängten Gewichtseinheiten mit ihren Bruchtheilen dem Gewicht des zuvor angehängten Körpers gleich sein. Dieses Verfahren ist nichts anderes, als eine Anwendung des im 20. Paragraphen aufgestellten allgemeinen Satzes.

man zum Wiegen der Körper verwendet, vorzugsweise geeignet, die Kräfte zu messen. Dahin gehören namentlich die gewöhnlichen, in dem bürgerlichen Verkehr gebräuchlichen Federwagen (Fig. 18) und der von Regnier construirte Kraftmesser oder Dynamometer (Fig. 19). Letzteres Instrument dient besonders dazu, beträchtliche Wirkungen, die durch Druck oder Zug hervorgebracht werden, zu messen. Sowohl bei diesem als bei der Federwage wird die jedesmalige Biegung der Feder oder die Größe des Gewichtes, durch welche sie hervorgebracht wird, mittelst eines Zeigers auf einem eingetheilten Kreis- oder Gradbogen angegeben. Wenn man sich eines dieser Instrumente zur Messung irgend einer Kraft bedienen will, so ist es nothwendig, sie vorher zu prüfen, um sich zu überzeugen, daß die Feder noch ihre ursprüngliche Elasticität besitzt. Dieses Prüfen geschieht auf dieselbe Weise, wie man die Unterabtheilungen des Kreisbogens bestimmt; d. h. man hängt ein, zwei, drei .... Gewichtseinheiten an und sieht zu, ob die Zeigerspitze denjenigen Theilstrichen entspricht, bei denen die Zahlen 1. 2. 3... stehen. Eine Beschreibung dieser Instrumente hier zu geben, scheint überflüssig, da ihr Gebrauch mit keinen besondern Schwierigkeiten verbunden ist, und die Fig. 19 sie deutlich genug darstellt.

22. Bemerkung über die Schwere. — Man weiß, daß sich die Wirkung der Schwere vermindert, wenn man sich über die Oberfläche der Erde erhebt; folglich wird derselbe Körper, der an der Erdoberfläche durch sein Gewicht die Feder eines der vorhin betrachteten Instrumente bis zu einem gewissen Grade biegen wird, dieß in etwas minderem Grade auf dem Gipfel eines Berges thun. Das Gewicht der Körper ist also auf diesem geringer, aber diese Verminderung ist selbst für die Höhe von einer Stunde (beiläufig 12000 Fuß) so unbeträchtlich, daß sie nicht mehr als ohngefähr $\frac{1}{5}\frac{1}{0}$ des ganzen Gewichtes beträgt. Die Erfahrung lehrt ferner, daß sich die Wirkung der Schwere ebenfalls allmählig vermindert, wenn man sich von den Polen aus

dem Äquator nähert; daß sie aber für zwei der entferntesten Punkte in einem Theil der Erdoberfläche, die beiläufig so groß wie Deutschland ist, kaum merkbar ist. Endlich ist noch bekannt, daß die Richtungen des Bleilothes nicht vollkommen parallel für zwei verschiedene Stellen sind, weil sie gegen den Mittelpunkt der Erde zusammenlaufen; jedoch machen diese Richtungen für zwei Orte der Erdoberfläche, die beiläufig um nicht mehr als 100 Fuß von einander entfernt sind, nur einen Winkel, der ohngefähr 5 Sekunden beträgt, sonach mit unsern gewöhnlichen Instrumenten nicht mehr wahrnehmbar ist. Man darf also dem Vorhergehenden zufolge die Schwere als eine beständige Kraft annehmen, deren Richtung in der Ausdehnung, innerhalb welcher wir unsere gewöhnlichen industriellen Arbeiten vornehmen, als unveränderlich zu betrachten ist; und eben so darf man auch die Einheit des Gewichtes als Maßeinheit der Kräfte annehmen, ohne zu besorgen, daß wir dadurch irgend einen merkbaren Fehler begehen.

III.

Wirkungsweise der Kräfte. — Gleichgewicht. — Arbeit.

23. Direkte Wirkung der Kräfte. — Wenn auf einen Körper überhaupt, oder auf einen Punkt seiner Oberfläche, eine ausserhalb desselben thätige Kraft einwirkt, so erzeugt sie an dieser Stelle einen Druck, wodurch die derselben nächstliegenden Moleculen, so wie die ihnen benachbarten, sofort zurückgedrängt werden, was eine Biegung oder Zusammendrückung des Körpers verursacht; dadurch werden dessen Moleculen oder Partikelchen einander genähert und streben in Folge der ihnen inwohnenden Repulsionskraft, oder der Elasticität, welche alle Körper in größerm oder geringerm Grade besitzen, ihre ursprüngliche Lage wieder einzunehmen. Die Moleculen, auf welche unmittelbar die Kraft einwirkt, drücken also auf die ihnen benachbarten, diese wieder auf die nächstfolgenden, und so von Stelle zu Stelle durch den ganzen Körper bis an dessen entgegengesetztes Ende fort; ist dasselbe befestigt, oder wird es von irgend einem Hinderniß in einer unverrückbaren Lage gehalten, so reducirt sich die Wirkung der Kraft auf einen Druck oder strebt die Form des Körpers zu verändern. Wenn aber jenes Ende frei ist, so wird dasselbe beginnen, seine Lage zu verändern, und folglich der ganze Körper in Bewegung gerathen. Diese Bewegung, welche das Resultat von einer Anzahl schnell aufeinander folgender Eindrücke ist, beweist, daß eine gewisse, wenn auch noch so kurze, Zeit erforderlich ist, damit die Kraft ihre volle Wirkung äussern kann, und daß es folglich ungereimt wäre, behaupten zu wollen, irgend eine Geschwindigkeit werde plötzlich, gleichsam in einem Augenblick, er-

zeugt. Derselbe Hergang findet auch in dem umgekehrten Falle statt, wo eine Kraft dazu verwendet wird, die Bewegung eines Körpers zu vernichten; jene zerstört zuvor die Geschwindigkeit der dem Angriffspunkt am nächsten liegenden Moleculen, hierauf die der benachbarten und so fort bis zu den entferntest liegenden. Bei der so eben gegebenen Erklärung von der äusserlich auf einen Körper einwirkenden Kraft ist vorausgesetzt worden, daß diese den Körper an der Angriffsstelle drückt und die ihr anliegenden Moleculen einander zu nähern sucht. Wenn hingegen die Kraft auf ihn von innen nach außen wirkt und folglich ihn zu ziehen oder auszudehnen sucht, so werden die einander nächst liegenden Moleculen von einander entfernt, und streben in Folge ihrer Attraktion in ihre ursprüngliche Lage zurückzukehren; auch hier wird die Wirkung allmählig von Stelle zu Stelle bis zu den entferntest liegenden Moleculen stattfinden und folglich ebenfalls eine gewisse Zeit hiezu gebrauchen. Man nimmt ferner wahr, daß in Folge dieser Attraktion und Repulsion die Moleculen der Körper sich eben so verhalten, als wenn sie durch sehr kleine, zwischen ihnen liegende, Federn in gewissen Entfernungen voneinander gehalten werden, und daß sich diese ebensowohl den Kräften, welche sie einander zu nähern suchen, als auch denjenigen, welche sie voneinander zu entfernen streben, entgegensetzen.

24. Princip der Rückwirkung. — Nach der bisher betrachteten, durch die Erfahrung bestätigten, Wirkung der Kräfte auf die Körper kann an keiner Stelle eines solchen eine Kraft durch Druck oder Zug thätig sein, ohne daß dadurch dessen moleculäre Federkräfte einen Widerstand entgegensetzen, der in entgegengesetzter Richtung von derjenigen der wirksamen Kraft sich äussert, und dessen Intensität genau der Intensität jener Kraft selbst gleich ist. Dieses Verhalten der Kraft und der durch sie erzeugten moleculären Gegenwirkung nennt man zusammen den Newton'schen Grundsatz, und drückt denselben folgendermassen aus:

Die Gegenwirkung ist immer der Wirkung gleich und entgegengesetzt.

Dieser Grundsatz kann durch eine Menge von Thatsachen nachgewiesen werden. Wenn man z. B. mit einem der Finger gegen einen Körper drückt, oder vermöge einer mit ihm vereinigten Schnur ihn zieht oder mittelst eines Stabes ihn stößt, so haben wir das Gefühl des Druckes, des Zuges oder des Stoßes in der Hand, jedoch in entgegengesetzter Richtung von der, in welcher wir sie ausüben, aber genau in derselben Stärke; bringt man zwei Federwagen (Fig. 20) an den Enden **A** und **B** einer Schnur oder eines Stabes an, so werden beide denselben Grad der Spannung anzeigen, wenn das entgegengesetzte Ende **D** durch ein Hinderniß festgehalten ist und eine Kraft **P** in der Richtung des Pfeils auf diese Verbindung einwirkt; die Spannung beider Federwagen ist constant, wenn die Kraft **P** ebenfalls unverändert dieselbe bleibt, oder sie verändert sich in beiden gleichmäßig, wenn die Kraft **P** sich so langsam ändert, daß ihre hervorgebrachte Wirkung Zeit hat, sich fortzupflanzen. Im Allgemeinen können wir uns keine Kraft in Wirksamkeit denken, die nicht sogleich einen eben so großen, aber in entgegengesetzter Richtung sich äussernden Widerstand hervorruft. Wenn ein Körperelement ein zweites anzieht, so wird auch umgekehrt jenes von diesem angezogen, und wie die Schwere oder die terrestrische Attraktion die Körper gegen die Erde zieht, eben so ziehen diese selbst die Erde wieder an. Dies ist einer der Hauptgrundsätze der Mechanik.

25. Jeder Punkt in der Richtung der Kräfte kann als ihr Angriffspunkt angenommen werden. — In allen den Fällen, wo eine Kraft auf die im Vorstehenden bezeichnete Weise wirksam ist, kann man annehmen, daß sie von dem Angriffspunkt bis zu dem, in der Richtungslinie der Kraft liegenden, entgegengesetzten Ende des Körpers, in Folge einer Reihe gleicher Wirkungen und Gegenwirkungen, welche sich wechselsweise vernichten und durch die vorhin betrachteten moleculären Federkräfte

hervorgerufen werden, ungeschwächt übertragen wird. Zufolge dieser Betrachtung ist es erlaubt, die Wirkung einer Kraft in jeden Punkt der, zwischen ihr und dem Widerstand befindlichen, materiellen Geraden zu versetzen; aber man muß dabei die Zeit, die zu dieser Übertragung erforderlich ist, nicht unberücksichtigt lassen.

26. In den meisten Fällen, wo mittelst eines Körpers eine Kraft auf eine andere Stelle übertragen wird, kann man jenen als vollkommen starr betrachten. — Da alle Körper mehr oder weniger zusammendrückbar oder ausdehnbar sind, so kann ein zwischen einer Kraft und einem Widerstand befindlicher Stab oder Faden durch die wirksame Kraft bis zu einem gewissen Grade, der von der Intensität derselben abhängig ist, zusammengedrückt oder ausgedehnt werden; wenn aber die Kraft und der Widerstand eine hinreichende Zeit hindurch unverändert verbleiben, so findet während der Dauer keine weitere Verkürzung des Stabes oder Verlängerung des Fadens statt, und man kann sie daher in allen solchen Fällen, wo sie zur Fortpflanzung der Wirkungen constanter Kräfte bei den Maschinen verwendet werden, als vollkommen starr und unausdehnbar betrachten, und zwar um so mehr, da man ihnen in der Wirklichkeit fast immer nur solche Dimensionen gibt, daß sie sich durch die auf sie einwirkenden Kräfte nur sehr wenig biegen oder ausdehnen können. Aber in allen andern Umständen, wo die Kraft während ihrer Wirksamkeit sich verändert, kann der Zustand des zwischen ihr und dem Widerstand befindlichen Körpers nicht mehr als beständig angenommen werden, und man muß alsdann auf die mit ihm vorgehende Veränderung Rücksicht nehmen.

27. Die Trägheit der Materie kann mittelst einer Kraft gemessen werden. — Aus dem Bisherigen haben wir ersehen, daß eine von aussen auf einen Körper wirkende Kraft, wenn sie diesen in Bewe-

gung setzen oder seine Bewegung, die er bereits besitzt, vernichten soll, in ihm einen Widerstand hervorruft, der der Richtung der wirksamen Kraft gerade entgegengesetzt und so groß wie diese ist. Diesen Widerstand kann man in den bezeichneten Umständen nur als das Resultat der Trägheit der materiellen Theile des Körpers betrachten, und ersieht also, daß sich diese Trägheit als eine wirkliche Kraft, die durch ein Gewicht gemessen werden kann, wahrnehmbar macht. Dieser von der Trägheit herrührende Widerstand nimmt für ein und denselben Körper, augenscheinlich mit dem Grade der Geschwindigkeit, die man erzeugen oder vernichten will, zu; wir werden bald sehen, daß er genau diesem Grade der Geschwindigkeit proportional ist, und daß er auch mit der Quantität der in jedem Körper eingeschlossenen Materie zunimmt.

Wenn man eine mit einem Körper verbundene Schnur zieht, so wird diese ausgedehnt und kann sogar abgerissen werden, in sofern dieser Zug ziemlich rasch erfolgt; dieses Abreissen wird um so leichter erfolgen, je mehr Masse der Körper besitzt, oder mit andern Worten, je schwerer er ist. Dieselbe Wirkung würde erfolgen, wenn der Körper sich bereits in Bewegung befindet und er mittelst der Schnur augenblicklich angehalten werden sollte. Zerschneidet man die mit dem Körper verbundene Schnur und vereinigt die so erhaltenen Trümmer vermöge einer Federwage wieder miteinander, so zeigt diese, wenn das Ende der Schnur aufgehangen oder in die Hand genommen wird und der Körper ruhend vertikal abwärts hängt, dessen Gewicht an; erhebt man jetzt mittelst einer raschen Bewegung der Hand den Körper aufwärts mit einer gewissen Geschwindigkeit, so wird die Federwage noch stärker angespannt, was eine Folge des Widerstandes ist, den die Trägheit der Materie entgegen setzt. Geschieht aber nach dem ersten Ruck dieses Erheben des Körpers gleichförmig, so geht der Index der Federwage auf diejenige Stelle, die das blose Gewicht des Körpers angibt, wieder zurück und verbleibt in derselben, so lange sich die Geschwindigkeit nicht verändert. Die Trägheit offenbart sich also in dem

Augenblick, wo sich die Geschwindigkeit verändert, als eine Kraft, während im Gegentheile die Schwere ohne Nachlassen auf den Körper wirkt, derselbe möge sich in Bewegung oder in Ruhe befinden. Man ersieht hieraus, daß die Spannung der Feder dazu dienen kann, die Veränderungen der Geschwindigkeit des Körpers und die Größe des Widerstandes, welcher durch dessen Trägheit hervorgerufen wird, zu messen.

28. Angriffspunkte, Richtungen und Intensitäten der Kräfte. — Bei einer Kraft muß man Folgendes unterscheiden: 1.) ihren Angriffspunkt, an dem sie unmittelbar wirkt; 2.) die Richtung oder die Gerade, nach welcher sich der Angriffspunkt bewegt, wenn er frei der Einwirkung der Kraft folgt; 3.) den Sinn dieser Richtung (entweder von links nach rechts oder umgekehrt, so wie vor- oder rückwärts von dem Angriffspunkte an gerechnet) und 4.) ihre absolute Intensität, welche durch ein in Pfunden, Kilogrammen ꝛc. ausgedrücktes Gewicht gemessen wird.

29. Geometrische Darstellung der Kräfte. — Es sei **A** (Fig. 21) der Angriffspunkt einer Kraft, deren Richtung durch die Linie **AB** angegeben ist; trägt man von **A** nach **B** eine Anzahl Längeneinheiten (z. B. Zolle, Linien ꝛc.) und nimmt hiebei an, daß jede dieser Längeneinheiten die Einheit des Gewichtes, in welchem die Kraft ausgedrückt werden soll, bezeichnet, so ist es augenscheinlich, daß diese vollständig durch die Linie **AB** dargestellt ist. Die Richtung, nach welcher die Kraft wirkt, bezeichnet man gewöhnlich durch einen Pfeil **mm**, oder **nn**$_1$, und ihre Intensität durch einen Buchstaben, z. B. mit **P** oder **Q** ꝛc. Man sagt also: eine Kraft **P** oder **Q** und versteht darunter die Intensität derjenigen Kraft, welche entweder durch die Linie **AB** oder **AC** ausgedrückt ist. Wenn also **AB** oder **AC** 10 oder 8 Längeneinheiten enthält, deren jede ein Pfund bezeichnet, so hat die Kraft **AB** oder **P**, so wie **AC** oder **Q** eine Intensität, die 10 oder 8 Pfunden gleich ist. Auf diese Weise ist die Betrachtung der Kräfte auf die Betrachtung geometrischer Figuren zurückgeführt.

30. Gleichgewicht der Kräfte. — Wenn mehrere an irgend einem Körper wirkende Kräfte sich gegenseitig vernichten, so daß jener in demselben Zustande verbleibt, in welchem er sich befand, bevor diese ihre Wirksamkeit zu äussern begannen, ihn folglich in Ruhe lassen, wenn er sich in Ruhe befindet, oder die Richtung und Intensität seiner Geschwindigkeit nicht verändern, wenn er bereits in Bewegung begriffen ist, so sagt man: daß diese an dem Körper wirksamen Kräfte sich im Gleichgewichte befinden. Das Gleichgewicht ist statisch in dem ersten, und dynamisch in dem zweiten Falle. Ziehen z. B. zwei Männer, jeder mit gleicher Kraft, an den Enden eines Seiles, so findet zwischen ihnen statisches Gleichgewicht statt, wenn sie ihre Stelle nicht verändern oder beide in Ruhe verbleiben; hingegen dynamisches, wenn der eine Mann dem andern in seiner Bewegung folgt. In der Wirklichkeit gibt es kein absolutes Gleichgewicht, weil die fortwährend in Bewegung befindliche Erde, ebenso wie ein auf der See oder auf einem Strome in Bewegung befindliches Schiff alle auf ihr vorhandenen Körper mit sich fortnimmt. Diese so eben erörterte Unterscheidung würde übrigens ganz unnütz sein, wenn nicht in dem gewöhnlich für das Gleichgewicht angenommenen Begriff diejenige von der Ruhe zugleich miteingeschlossen wäre, was jedoch der gegebenen Erklärung zu Folge nicht unumgänglich nothwendig ist.

31. Einfluß der Trägheit auf den Zustand des Gleichgewichts. — Wenn ein, der Einwirkung verschiedener Kräfte unterworfener Körper in gleichförmiger Bewegung verbleibt, so müssen der im Vorhergehenden gegebenen Erklärung zu Folge, diese Kräfte nothwendigerweise unter sich im Gleichgewichte sein, so wie aber die Geschwindigkeit sich vermehrt oder vermindert, findet das Gleichgewicht unter diesen Kräften nicht mehr statt. Wird aber auf die Kraft der Trägheit der verschiedenen materiellen Moleculen des Körpers Rücksicht genommen und man fügt den an ihm äusserlich wirksamen Kräften eine andere Kraft bei, die demjenigen von der Trägheit entstehenden Widerstand

gleich und folglich im Stande ist, die durch ihn zu erzeugenden Modifikationen in der Bewegung zu verhindern, so wird ebenfalls zwischen allen diesen Kräften Gleichgewicht stattfinden. Wenn z. B. ein Pferd ein Fuhrwerk auf einem Wege zieht, so überwindet es jeden Augenblick alle Widerstände, die sich seiner Wirkung entgegensetzen. Ist die Bewegung fortwährend gleichförmig, so entstehen diese Widerstände einzig und allein vom Terrain, von den verschiedenen Reibungen ꝛc. Nimmt die Geschwindigkeit in jedem folgenden Augenblick zu, so hat das Pferd die sämmtlichen vorherbetrachteten Widerstände und den, welcher von der Trägheit herrührt, zu überwinden; wenn hingegen in Folge neuer Hindernisse des Weges die Geschwindigkeit sich allmählig vermindert, so tritt die Wirkung der Trägheit, welche immer die im vorhergehenden Augenblick stattgefundene Geschwindigkeit zu erhalten strebt, auf die Seite des Pferdes über und hilft ihm die ursprünglichen und die neu hinzugekommenen Hindernisse überwinden.

32. Seitenkräfte (Composanten) und Mittelkräfte (Resultanten). — Wenn verschiedene Kräfte **O, P, Q** unter sich im Gleichgewichte sind, so kann jede einzelne von ihnen als eine Kraft betrachtet werden, welche die Wirkung der übrigen aufhebt oder zerstört.

Wird also eine Kraft **cr = R** (Fig. **22**), deren Intensität der Kraft **O** gleich ist, in entgegengesetzter Richtung von dieser an dem Angriffspunkt **c** angebracht, so vernichtet sie die Wirkung der einzelnen Kraft **O** und erzeugt folglich auf den Körper, wovon **c** ein Punkt ist, dieselbe Wirkung, wie die beiden Punkte **P** und **Q** zusammengenommen. Aus diesem Grunde nennt man die Kraft **R** die Mittelkraft (Resultante) der beiden Kräfte **P** und **Q**, und diese selbst Seitenkräfte (Composanten) von **R**.

Umgekehrt, wenn statt der Resultanten verschiedener Kräfte **P, Q** .... eine ihr gleiche, an demselben Punkte in entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft **O** substituirt wird,

so besteht zwischen dieser und allen übrigen Kräften P, Q...., Gleichgewicht.

33. Gleichgewicht und Resultirende derjenigen Kräfte, deren Richtungen mit ein und derselben Geraden zusammenfallen. — Wenn verschiedene Kräfte auf einen materiellen Punkt so wirken, daß ihre sämmtlichen Richtungen mit der durch diesen Punkt gehenden Geraden zusammenfallen und alle in demselben Sinne wirken, so ist ihre vereinigte Wirkung einer Kraft gleich, deren Intensität so groß als die Summe der Intensitäten aller wirksamen Kräfte, und die folglich die Resultirende von diesen ist; eine eben so große Kraft, wie diese Resultante, in entgegengesetzter Richtung von ihr angebracht, ist mit derselben oder mit den sämmtlichen Kräften, deren Wirkungen sie ersetzt, im Gleichgewicht. Wirkt aber eine Anzahl der so eben betrachteten Kräfte im entgegengesetzten Sinne (in entgegengesetzter Richtung) von den übrigen, so wird die Resultante aller Kräfte dem Unterschiede, der zwischen der Summe der nach einer Richtung und derjenigen nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte stattfindet, gleich sein, und ihre Wirkung selbst wird in dem Sinne derjenigen Kräfte, welche zusammengenommen die größere Summe bilden, geschehen. Denn von zwei einander entgegengesetzt wirkenden, ungleich großen Kräften vernichtet die kleinere einen ihr gleichen Theil der größern oder setzt sich mit demselben in's Gleichgewicht, und der übrig bleibende Theil repräsentirt die Größe und Richtung der Resultante. Ziehen z. B. drei Personen an dem einen Ende eines Seils, deren wirksame Kräfte man durch 10, 17 und 25 Pfund ausdrückt, und zwei andere an dem andern Ende in entgegengesetzter Richtung von jenen mit wirksamen Kräften, die durch 12 und 19 Pfund gegeben sind, so ist $10 + 17 + 25 = 52$ und $12 + 19 = 31$, folglich ist die wirkliche thätige Kraft

$$52 - 31 = 21 \text{ Pfund},$$

mit welcher in der Richtung der drei Personen das Seil fortbewegt wird.

34. Erklärung der mechanischen Arbeit der Kräfte. — Der einfachste Fall des Gleichgewichts ist derjenige, wo zwei gleiche Kräfte in entgegengesetzter Richtung wirken und sich gegenseitig vernichten; auf denselben beschränkt sich beinahe durchaus die Anwendung der bewegenden Kräfte bei den industriellen Arbeiten. Arbeiten heißt man, einen in den Künsten oder Gewerben sich darbietenden Widerstand überwinden oder vernichten, wie z. B. die Cohäsion, die Adhäsion der Körper, die Federkraft, die Schwere, die Trägheit der Materie ꝛc. Wenn man mittelst Reibung einen Körper schleift oder polirt oder ihn in Theile zerlegt, oder wenn man Lasten erhebt, Fuhrwerke auf einer Strasse fortzieht, Federn spannt, Kugeln wirft ꝛc., so sind alle diese Operationen nichts anderes als das, was wir mit dem Namen: Arbeiten belegen, und darin bestehen, daß man continuirlich fort Widerstände zu überwinden oder zu vernichten sucht.

Die mechanische Arbeit setzt nicht nur einen zu überwindenden Widerstand voraus, sondern derselbe muß sich auch nach der Richtung des Angriffspunktes der Kraft, die ihn vernichten soll, fortwährend erneuern. Wenn z. B. mittelst eines Meisels ein Theil der Oberfläche eines gußeisernen Blockes abgenommen werden soll, so muß nicht nur die anzuwendende Kraft der Richtung des Widerstandes, welchen der hinwegzunehmende Theil entgegensetzt, gerade entgegenwirken, sondern der Angriffspunct des Meisels muß auch beständig der Richtung jenes Widerstandes folgen. Jemehr der Meisel vorrückt, je breiter er ist und je tiefer er eindringt, desto länger, breiter und dicker ist der abgenommene Streifen. Der Widerstand nimmt also einmal mit der Länge des Weges, welchen der Meisel zurücklegt, und dann auch mit dessen Breite und der Tiefe, zu der er in die Oberfläche des Blockes eindringt, zu. Die wirklich geleistete Arbeit ist also der Intensität der angewendeten Kraft und der Länge des

durchlaufenen Weges, nach der Richtung des Widerstandes genommen, proportional. Dasselbe ist der Fall, wenn der Meisel nicht mit der Hand geführt wird, sondern mittelst einer Maschine (einer Hobelmaschine) vorwärts bewegt wird. Überhaupt findet ein analoges Verhalten bei allen industriellen Arbeiten statt, die durch Werkzeuge oder Maschinen verrichtet werden.

35. Maaß der Arbeit, wenn der Widerstand constant ist. — Nimmt man an, der Widerstand, so wie die anzuwendende Kraft seien in jedem Augenblick dieselben, aber einander entgegengesetzt, also beide einander gleich und constant, so ist dieser Voraussetzung zu Folge klar, daß die geleistete Arbeit beständig dem Weg, den der Angriffspunkt der Kraft oder der angegriffene Punkt des Widerstandes beschreibt, proportional sein wird, daß sie folglich zweimal oder dreimal so groß sein wird, wenn der zurückgelegte Weg des Angriffspunktes doppelt oder dreifach so groß ist. Wird also diejenige geleistete Arbeit als Einheit angenommen, während von dem angegriffenen Punkte des Widerstandes ein Weg, der einem Fuß (oder einem Meter) oder irgend einer andern Maßeinheit gleich ist, durchlaufen wird, so läßt sich die gesammte vollbrachte Arbeit durch den ganzen zurückgelegten Weg, d. h. durch die Angabe der Fuße ꝛc., die er enthält, messen. Sind hingegen für zwei geleistete Arbeiten die durchlaufenen Wege gleichgroß, aber die Widerstände bei der einen zwei- oder dreimal so groß, als bei der andern, so ist in diesem Falle jene Arbeit doppelt oder dreifach so groß als diese. Wenn man also für die Einheit der mechanischen Arbeit einen Widerstand annimmt, der einem Pfund (oder Kilogramm ꝛc.) gleich ist und die Länge eines Weges, der einen Fuß (oder Meter ꝛc.) mißt, durchläuft, so ist augenscheinlich, daß jede andere Arbeit, welche durch die, eine gewisse Zeit fortdauernde, Überwindung eines constant verbleibenden Widerstandes vollbracht wird, durch die Anzahl der Pfunde (oder Kilogramme), welche die Größe des Widerstandes ausdrücken, so vielmal genom-

men, als der zurückgelegte Weg des angegriffenen Punktes Fuße (oder Meter ꝛc.) enthält, oder durch das Produkt aus diesen beiden Zahlen gemessen wird. Soll z. B. irgend eine constante Kraft dazu verwendet werden, um einen Körper auf einem geraden horizontalen Wege mit gleichförmiger Geschwindigkeit vorwärts zu bewegen, so besteht deren Arbeit einzig darin, die durch das Terrain entstehenden, constant verbleibenden Reibungswiderstände, die ihr beständig entgegenwirken, zu überwinden; würde man diesen durch die Reibung erzeugten Widerstand durch 37,5 Pfund und den beschriebenen Weg durch 64 Fuß ausdrücken, so ist die gesammte geleistete Arbeit gleich $3{,}75 \times 64 = 2400$; diese Zahl kann wiederum in zweierlei Beziehung genommen werden, einmal, indem man diese Arbeit gleich 2400 Pfund setzt, welche die Länge eines Weges, der einen Fuß mißt, zurückgelegt haben, und das anderemal, indem man sie gleich 1 Pfund, das einen Weg von 2400 Fuß durchlaufen hat, annimmt. Wollte man diese geleistete Arbeit in Geldwerth ausdrücken und z. B. annehmen, daß die Einheit der Arbeit mit $\frac{1}{5}$ Gulden bezahlt würde, so ist die Größe jener im Geldbetrag durch $2400 \times \frac{1}{5} = 480$ Gulden repräsentirt.

Im Allgemeinen nimmt man aus Vorstehendem wahr, daß die mechanische Arbeit, die einen gewissen, längs einem gegebenen Wege sich unaufhörlich erneuernden, Widerstand bezwingt, zum Maße das Produkt hat, welches man erhält, wenn man diesen Widerstand mit dem von seinem angegriffenen Punkte in gerader Linie beschriebenen Weg multiplicirt; wobei als Einheit der Arbeit die Einheit der Wirkung, in irgend einem Gewichte ausgedrückt, das die Einheit eines, in irgend einem Maße gegebenen Weges in gerader Richtung durchläuft, angenommen ist. Wir sagen absichtlich in gerader Richtung, weil es sich hier nur von der Arbeit einer Kraft handelt, die dem Widerstande gerade entgegengesetzt ist, und nicht von derjenigen

einer Kraft, die auf irgend eine andere Weise jenem Widerstande entgegen wirkt.

36. Maaß der Arbeit, wenn der Widerstand veränderlich ist. — Wenn der Widerstand oder die ihm gleiche, in entgegengesetzter Richtung stattfindende Wirkung, welche jenen fortwährend zu zerstören strebt, nicht in jedem Augenblick dieselbe Intensität hat, sondern ohne Aufhören sich verändert, wie dies in sehr vielen Fällen stattfindet, so kann die Größe der geleisteten Arbeit nicht mehr auf die im vorigen Paragraphen angegebene Weise ausgedrückt werden; aber wir können den während der Dauer einer sehr kleinen Zeit (eines Zeitelementes) thätigen Widerstand als constant annehmen, oder dafür den Mittelwerth derjenigen Widerstände setzen, die zu Anfang und am Ende des in einem Zeitelement zurückgelegten Weges stattfinden, und diese in einem so kleinen Zeittheilchen geleistete Arbeit kann man durch das Produkt: aus dem mittlern Widerstande in das Element des Weges ausdrücken. Die totale Arbeit ist dann der Summe dieser partiellen Arbeiten oder der Summe dieser einzeln erhaltenen Produkte gleich. Um also die Größe der Arbeit, die durch einen veränderlichen Widerstand erzeugt wird, auszudrücken, ziehen wir in einer Ebene eine Kurve **O'a'b'c'** .... (Fig. 23), deren Abscissen **Oa, Ob, Oc** .... die zurückgelegten Wege (in Fußen oder Zollen ꝛc. gemessen), welche durch den Angriffspunkt des Widerstandes beschrieben werden, und deren Ordinaten **OO', aa', bb'** ...., die von einem passenden Maßstabe abgenommenen, den Stellen **O, a, b** .... entsprechenden Widerstände (in Pfunden ꝛc. ausgedrückt) darstellen; die sehr kleinen, gleichgroßen Räume **Oa, ab, bc** .... sind alsdann die in jedem Zeitelement beschriebenen Wege. Die in den aufeinander folgenden Zeitelementen geleisteten Arbeiten werden folglich durch die Produkte: dieser sehr kleinen Wegen in die ihnen correspondirenden Widerstände gemessen, oder da dieselben den Flächeninhalten der aufeinander folgenden Trapeze **OO'a'a, aa'b'b, bb'c'c** .... gleich sind, so werden jene Arbeiten durch

die Produkte $\frac{1}{2}(OO' + aa')\,Oa$, $\frac{1}{2}(aa' + bb')\,ab$, $\frac{1}{2}(bb' + cc')\,bc$.... repräsentirt. Die ganze Arbeit wird also durch die Summe dieser Trapeze oder durch den Flächeninhalt des Polygons $OO'a'b'c'd'e'fg'h'hO$ ausgedrückt. Man sieht, daß die Polygonfläche um so weniger von der, durch die Kurve $O'a'b'c'd'e'f'g'h'$, die Abscisse Oh und die Ordinaten OO', hh' begrenzten Figur verschieden sein wird, je mehr Ordinaten zwischen OO' und hh' angenommen werden. Wenn daher die Anzahl dieser Ordinaten sehr groß ist, so kann man dann ohne merklichen Fehler die Fläche des Polygons $OO'a'b'c'd'e'f'g'h'h$ oder die Summe der Trapeze $OO'a'a$, $aa'b'b$, $bb'c'c$.... für das Maß der wirklich geleisteten Arbeit annehmen, während der Angriffspunkt des Widerstandes den Weg Oh in der ihm vorgeschriebenen Richtung durchläuft. Ferner nimmt man aus der so eben gegebenen Darstellung leicht wahr, daß, wenn entweder durch Versuche oder auf irgend eine andere Weise das Gesetz oder die Verhältnisse, in welchen die veränderlichen Widerstände zu den beschriebenen Wegen stehen, bekannt ist, um nach (16) die stattfindende Bewegung geometrisch ausdrücken zu können, jede Aufgabe, die Größe einer mechanischen Arbeit zu finden, darauf zurückgeführt werden kann, daß man zuerst die Kurve, welche das Gesetz der Bewegung ausdrückt, zeichnet und dann die Fläche bestimmt, welche zwischen ihr, der Abscisse und den beiden Ordinaten, die dem Anfang und dem Ende der Arbeit entsprechen, enthalten ist.

Um mittelst einer geringen Anzahl angenommener Ordinaten den Inhalt der von einer Kurve und den Coordinaten begrenzten Fläche ziemlich genau zu erhalten, wendet man mit Erfolg das nach dem englischen Geometer Thomas Simpson benannte und von ihm aufgefundene Theorem an, von dem wir in Nachstehendem den Beweis geben, weil wir im Verlauf dieses Werkes öfters Gelegenheit haben, es mit Nutzen anwenden zu können.

Es sei $aa'b'c'd'e'f'g'ga$ (Fig. 22) eine, durch die Kurve $a'b'c'd'e'f'g'$, durch die Linie (Abscisse) ab und durch die

zu dieser senkrechten Ordinaten aa′, gg′ begrenzte, ebene Fläche, deren Inhalt wir mit F bezeichnen wollen. Die Linie ab theilen wir in eine gerade Anzahl gleicher Theile (z. B. in sechs, wie es die Figur zeigt) und errichten in den Theilpunkten b, c, d .... neue Ordinaten bb′, cc′, dd′... welche durch die Kurve begrenzt werden, so geben die Trapeze aa′b′b, bb′c′c .... zusammengenommen oder die Polygonfläche aa′b′c′d′e′f′gga einen der durch die Kurve begrenzten Fläche genäherten Werth, der jedoch größer oder kleiner als F ist, je nachdem die Kurve ihre convexe oder concave Seite der Abscissenaxe OB zukehrt.

Die aufeinander folgenden Ordinaten aa′, bb′, cc′.... bezeichne man mit der natürlichen Zahlenfolge und nehme jetzt ein Stück der gegebenen Fläche, das zwischen zwei aufeinander folgenden, mit ungeraden Zahlen bezeichneten, Ordinaten enthalten ist, in besondere Betrachtung. Wir wählen hiezu das Stück cc′d′e′e und stellen dasselbe in der Figur 25 abgesondert dar.

Der gesammte Flächeninhalt der beiden nebeneinander liegenden Trapeze cc′d′d und dd′e′e (Fig. 25) ist

$$\tfrac{1}{2}(cc' + dd')\,cd + \tfrac{1}{2}(dd' + ee')\,de$$

oder da cd = de ist, gleich

$$\tfrac{1}{2}\,cd\,(cc' + 2dd' + ee')$$

Man wird aber augenscheinlich einen, der Fläche cc′d′e′e vielmehr genäherten Werth erhalten, wenn man diese in drei andere trapezförmige Flächen, durch neue in gleichen Abständen von einander gezogene Ordinaten mm′, nn′ theilt, so daß dann cm = mn = ne = $\frac{2}{3}$ cd ist und dadurch die Trapezen cc′m′m, mm′n′n, nn′e′e erhalten werden. In diesem Falle ist der Inhalt der Fläche cc′m′n′e′e gleich

$$\tfrac{1}{2}(cc' + mm')\,cm + \tfrac{1}{2}(mm' + nn')\,mn + \tfrac{1}{2}(nn' + ee')\,ne$$

oder, wenn man für cm, mn und ne den ihnen gleichen Werth setzt, so ist der neue Ausdruck für die Fläche cc′m′n′e′e gleich

$$\tfrac{1}{3}\,cd\,(cc' + 2\,mm' + 2\,nn' + ee') \qquad (\alpha)$$

Um nun der Mühe überhoben zu sein, die neuen Ordinaten mm', nn' ziehen zu müssen und demohngeachtet einen der Fläche cc'm'n'e'e sehr angenäherten Werth für (α) zu erhalten, ziehe man die Chorde m'n', welche die von den benachbarten Ordinaten gleichweit abstehende Ordinate dd' in dem Puncte o schneidet, dann hat man

$$do = \tfrac{1}{2}(mm' + nn')$$

oder

$$4do = 2mm' + 2nn';$$

substituirt man diesen für $2mm' + 2nn'$ erhaltenen Werth $4do$ in (α), so sind die beiden vereinigten Trapeze cc'm'n'e'e durch

$$\tfrac{1}{3}cd\,(cc' + 4do + ee') \qquad (\beta)$$

ausgedrückt. Die Linie do ist zwar nicht bekannt, aber sie differirt nur ausserordentlich wenig von der Ordinate dd'; ersetzt man also in (β) do durch dd', so erhalten wir einen etwas zu großen Werth für den Flächeninhalt des Polygons cc'd'e'e. Weil aber dessen Flächeninhalt selbst ein wenig kleiner ist als die wirkliche, zwischen den Ordinaten cc' und ee', der Kurve c'm'd'n'e' und der Linie ce enthaltene Fläche, so bildet jene Vermehrung gleichsam eine Compensation, und man kann daher als sehr angenäherten Werth für die Fläche cc'm'd'n'e'e ganz füglich den Ausdruck

$$\tfrac{1}{3}cd\,(cc' + 4dd' + ee')$$

setzen. Man hat also in Fig. 24, wenn der Abstand zweier benachbarter Ordinaten mit A bezeichnet wird,

$$\text{Fläche } aa'b'c'c = \tfrac{1}{3}A\,(aa' + 4bb' + cc')$$
$$\text{" } cc'd'e'e = \tfrac{1}{3}A\,(cc' + 4dd' + ee')$$
$$\text{" } ee'f'g'g = \tfrac{1}{3}A\,(ee' + 4ff' + gg'),$$

folglich ist der Inhalt der ganzen Fläche aa'b'c'd'e'f'g'e'e gleich

$$\tfrac{1}{3}A\,(aa' + 4bb' + cc' + cc' + 4dd' + ee' + ee' + 4ff' + gg')$$

oder, wenn die gleichnamigen Glieder wirklich addirt werden, gleich

$$\tfrac{1}{3}A\,[aa' + gg' + 2(cc' + ee') + 4(bb' + dd' + ff')] \qquad (\gamma)$$

Dieser Ausdruck (γ) repräsentirt das von Thomas Simpson aufgestellte Theorem, das man in Worten folgendermassen ausdrücken kann.

Man theilt den Abstand zwischen den beiden äussersten Ordinaten der durch eine Krumme begrenzten Fläche in eine gerade Anzahl gleicher Theile (in den meisten Fällen werden 4 oder höchstens 6 Theile hinreichend sein), errichtet in den Theilpunkten andere Ordinaten und bezeichnet ihre Folge, die beiden äussersten mit eingerechnet, mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ꝛc., so bekommt man ihren Inhalt, wenn

1. die Summe der beiden äussersten Ordinaten,
2. die doppelte Summe der Uebrigen mit ungeraden Zahlen bezeichneten Ordinaten,
3. die vierfache Summe der mit geraden Zahlen bezeichneten Ordinaten

zusammen in eine einzige Summe vereinigt und diese mit dem dritten Theil des Abstandes zweier benachbarten Ordinaten multiplicirt wird.

Bezeichnet man die aufeinanderfolgenden Ordinaten mit $\mathbf{O_1, O_2, O_3, O_4}$ ꝛc. und den Inhalt der Fläche mit $\mathbf{F}$, so ist für fünf Ordinaten (oder vier gleiche Zwischenräume, deren jeder gleich $\mathbf{A}$ ist),

$$\mathbf{F} = \tfrac{1}{3}\mathbf{A}\left[\mathbf{O_1 + O_5 + 2O_3 + 4(O_2 + O_4)}\right] \quad (\delta)$$

und für sieben Ordinaten (oder sechs gleiche Zwischenräume)

$$\mathbf{F} = \tfrac{1}{3}\mathbf{A}\left[\mathbf{O_1 + O_7 + 2(O_3 + O_5) + 4(O_2 + O_4 + O_6)}\right] \quad (\varepsilon)$$

Vorstehende in (δ) und (ε) für $\mathbf{F}$ erhaltene Werthe sind für alle Fälle der industriellen Mechanik ausreichend; man wird gewöhnlich (δ) nehmen und nur, wenn man ein ziemlich genaues Resultat zu erlangen beabsichtigt, wird man mittelst (ε) den Werth von $\mathbf{F}$ bestimmen. In manchen Fällen wird es sogar ausreichend sein, wenn man nur drei Ordinaten (oder zwei gleiche Zwischenräume) annimmt; dann hat man

$$\mathbf{F} = \tfrac{1}{3}\mathbf{A}\,(\mathbf{O_1 + O_3 + 4O_2}) \quad (\zeta)$$

Daß durch die auf Seite 65 vorgenommene Compensation, indem man statt der Linie do (Fig. 25) die Ordinate dd' setzte, ein von der wirklichen Fläche äußerst wenig verschiedener Inhalt erlangt wird, davon kann man sich durch folgende Betrachtungen überzeugen. Man ziehe die Sehnen m'd', d'n', so ist die Fläche des Dreiecks m'n'd' durch $\frac{1}{2}$ mn × od' ausgedrückt, indem dieses aus den beiden Dreiecken m'od', on'd' zusammengesetzt ist, deren Flächen zusammengenommen gleich

$$\tfrac{1}{2}\,md \times od' + \tfrac{1}{2}.\,dn \times od' = \tfrac{1}{2}\,mn \times od'$$

sind und da $mn = \frac{2}{3}\,cd$, so ist die Fläche des Dreiecks m'n'd'

$$\tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{3}\,cd \times od' = \tfrac{1}{3}\,cd \times od'.$$

Man vermehrt also den Flächeninhalt des Polygons cc'm'n'e'e um den vierfachen Inhalt des Dreieckes m'd'n', während man ihn um die Summe der drei zwischen den Sehnen c'm', m'n', n'e' und der Kurve enthaltenen Segmente vermehren sollte. Wenn folglich diese Summe genau der vierfachen Fläche des Dreieckes m'd'n' gleich ist, so ist die Compensation genau und die Methode vollkommen strenge. In jedem Falle riskirt man nur, daß man sich um die Differenz der eben erwähnten beiden Summen täuscht, eine Differenz, welche in der Regel nur ein sehr kleiner Bruchtheil sein wird. Übrigens ersieht man hieraus, daß der zu begehende Fehler um so kleiner sein wird, je größer die Zahl der gezogenen Ordinaten ist. Bei sehr ausgedehnten Figuren kann man dieselbe zuvor in mehrere Theile theilen (Fig. 26) und jeden Theil besonders mittelst (ſ) oder (ε) berechnen. *)

---

*) Nach den Angaben des Schweden Chapman kann auch das Simpson'sche Theorem zur Berechnung der Kubikinhalte solcher Körper angewendet werden, welche durch die Umdrehung einer Kurve um eine feste Axe entstehen. In diesem Falle beschreiben die Endpuncte der Ordinaten cc', dd', ee' (Fig. 25) Kreise, deren Flächeninhalte durch $\pi(cc')^2$, $\pi(dd')^2$, $\pi(ee')^2$ ausgedrückt sind (wenn π das Verhältniß der Peripherie zum Halb-

37. Mittelwerth der veränderlichen Widerstände. — Hat man auf die im vorigen Paragraphen angegebene Weise den Werth der mechanischen Arbeit eines veränderlichen Widerstandes für irgend einen von seinem Angriffspuncte durchlaufenen Weg gefunden,

---

messer bezeichnet). Nimmt man diese Produkte als abstrakte Zahlen an, so kann man diese wiederum als die Ordinaten cC′, dD′, eE′ (Fig. 27) einer andern Kurve C′D′E′ betrachten, und dann wird augenscheinlich der nach dem Simpson'schen Theorem erhaltene Ausdruck für die Fläche cC′D′E′e den Kubikinhalt des durch die vollständige Umdrehung der Kurve c′d′e′ um die Axe oo′ erzeugten und zwischen den Kreisen, deren Halbmesser cc′ und ee′ sind, enthaltenen körperlichen Raumes K„ ausdrücken. Man wird also

$$K_{,,} = \tfrac{1}{3}\,cd\,(cC' + 4\,dD' + eE')$$

haben. Da nun $cC' = \pi\,(cc')^2$, $dD' = \pi\,(dd')^2$, $eE' = \pi\,(ee')^2$ ist, so erhält man, wenn diese Werthe für cC′ ꝛc. substituirt werden,

$$K_{,,} = \tfrac{1}{3}\,cd \times \pi\left[(cc')^2 + 4\,(dd')^2 + (ee')^2\right]$$

Hätte man also den Kubikinhalt zu berechnen, der durch die Umdrehung der Kurve a′b′c′d′e′f′g′ (Fig. 24) um die Axe OB entsteht, und man bezeichnet die Kubikinhalte der durch die Kurve a′b′c und die Halbmesser aa′, cc′ eingeschlossenen Räume mit K,

„ c′d′e′ „ „ „ cc′, ee′ „ „ „ K„

„ e′f′g′ „ „ „ ee′, gg′ „ „ „ K„,

so wie denjenigen des durch die ganze Kurve a′b′c′d′e′f′g′ und die Halbmesser aa′, gg′ eingeschlossenen Raumes mit K, so ist

$$K,\ \tfrac{1}{3}\,ad \times \pi\left[(aa')^2 + 4\,(bb')^2 + (cc')^2\right]$$

$$K_{,,}\ \tfrac{1}{3}\,ad \times \pi\left[(cc')^2 + 4\,(dd')^2 + (ee')^2\right]$$

$$K_{,,,}\ \tfrac{1}{3}\,ad \times \pi\left[(ee')^2 + 4\,(ff')^2 + (gg')^2\right]$$

und

$$K = \tfrac{1}{3}\,ad \times \pi\left[(aa')^2 + (gg')^2 + 2\left((cc')^2 + (ee')^2\right) + 4\left((bb')^2 + (dd')^2 + (ff')^2\right)\right]$$

und theilt man jene durch die Größe dieses Weges, so erhält man das, was man den mittlern Widerstand nennt. Die Betrachtung desselben ist eben so wichtig als diejenige der mittlern Geschwindigkeit einer periodischen Bewegung; denn es findet fast immer der Fall statt, daß der Widerstand nur zwischen gewissen, einander mehr oder weniger nahe liegenden Grenzen varirt, oder zwischen denselben wechselseitig zu- und abnimmt, ohne jemals größer oder kleiner zu werden als die Größen, welche das Maximum und Minimum jener Grenzwerthe ausdrücken. Es folgt daraus, daß die Arbeit in kleinern oder größern Perioden verrichtet und daher durch die Fläche **OO'a'b'....h'h** (Fig. 28) repräsentirt wird, welche durch eine krumme Linie **O'a'b'c'...** begrenzt ist, deren Ein- und Ausbauchungen sich sehr wenig dies- und jenseits der mit der Axe **Oh** parallelen Linie **O'h'** erstrecken. Daß in solchen, sehr häufig vorkommenden, Fällen es vortheilhafter ist, eine gleichförmige mittlere Arbeit statt der veränderlichen zu substituiren, ist leicht wahrzunehmen, indem jene dieselben Resultate wie diese gibt, ohne mit den ihr angehörigen Entwickelungen behaftet zu sein. Man wird daher in der in-

---

oder wenn man wie oben $ad = A$ und $aa' = O_1$, $bb' = O_2$, $cc' = O_3$ u. s. w. setzt, so ist

$$K = \frac{1}{3} A \cdot \pi \left[O^2_1 + O^2_7 + 2(O^2_3 + O^2_5) + 4(O^2_2 + O^2_4 + O^2_6) \right] \quad (1)$$

Entsteht ein solcher Körper nur durch ein theilweises Umdrehen der Kurve um die Axe, d. h. beschreibt jene nur den Bogen φ (in Graden, Minuten ꝛc. ausgedrückt), und man bezeichnet in diesem Falle seinen Kubikinhalt mit K_0, so ist

$$K_0 : K = \varphi : 360$$

hieraus $$K_0 = \frac{\varphi}{360} K$$

folglich

$$K_0 = \frac{A \cdot \varphi \cdot \pi}{1080} \left[O_1^2 + O_7^2 + 2(O_3^2 + O_5^2) + 4(O_2^2 + O_4^2 + O_6^2) \right] \quad (2)$$

dustriellen Mechanik nie unterlassen, von jener Substitution Anwendung zu machen, wenn sich die Veränderungen der Arbeit periodisch wiederholen.

38. Beispiele einer mechanischen Arbeit. — Wird eine Kraft zum Spannen einer Feder verwendet, so entwickelt sie in jedem Augenblick während ihrer Thätigkeit eine Wirkung, die dem Widerstande der Feder gleich und entgegengesetzt ist und welche in dem Maße zunimmt, als der zurückgelegte Weg ihres Angriffspunktes größer wird. Diese Wirkung kann unmittelbar durch die bereits (in 21) erwähnten Federwagen und Dynamometer für jede Lage der gespannten Feder oder des Angriffspunktes der Kraft gemessen werden. Man kann auch die in (16) angegebene Methode anwenden, um diejenige Kurve zu zeichnen, welche das Gesetz der durch sie entstehenden Bewegung angibt und mittelst derselben die gesammte mechanische Arbeit durch die Summe der in den aufeinanderfolgenden Zeitelementen stattfindenden partiellen Arbeiten ausdrückt. Der bei diesem und den frühern Beispielen bezeichnete Weg, welchem gemäß der Gang der Rechnung anzuordnen ist, findet durchaus in allen andern Fällen der Industrie statt, wo ein reiner, sich jeden Augenblick erneuernder Widerstand in der Richtung seines Angriffspunktes fortwährend zu überwinden ist.

39. Unterscheidung zwischen der mechanischen Arbeit der Kraft und derjenigen des nützlichen Widerstandes; Nutzeffekt. — Bei der Schätzung einer geleisteten Arbeit muß man sich hüten, daß man diejenige, welche unmittelbar durch die Wirkung der Kraft an ihrem Angriffspunkte entsteht, nicht mit der durch sie an dem Angriffspunkte des Widerstandes hervorgebrachten nützlichen Arbeit verwechselt; denn man nimmt leicht wahr, daß ein Theil der erstern durch andere Widerstände, die an den bewegenden Theilen der Vorrichtung entstehen, vernichtet wird und nur das Übrigblei-

bende zur Überwindung desjenigen Widerstandes verwendet werden kann, welcher diejenige Arbeit hervorbringt, die wir mit dem Namen nützliche Arbeit oder Nutzeffekt der gegebenen Kraft belegen. Es folgt hieraus, daß der Nutzeffekt das Resultat der mechanischen Arbeit der Kraft ist und daß im Vorhergehenden eigentlich dieser unter dem Maaß der geleisteten Arbeit zu verstehen ist. Weiter unten werden wir die Arbeit der bewegenden Kräfte, die Umstände, welche die Resultate dieser Wirkung modificiren und den Verlust, welchen die Arbeit der Kraft in den verschiedenartigen Fällen der Anwendung dadurch erleidet, untersuchen.

40. **Gegenseitige Abhängigkeit gewisser mechanischer Arbeiten.** — Wie bei industriellen Operationen die durch sie hervorgebrachten partiellen Arbeiten gegenseitig von einander abhängen, kann man aus dem Beispiel abnehmen, wo mittelst einer Feile ein Metallstück bearbeitet werden soll, indem sich der ganze Hergang des Feilens unter folgende verschiedene Operationen, die als eben so viele partielle Arbeiten zu betrachten sind, bringen läßt; 1.) muß derjenige, welcher feilt, die Feile gegen die darunter befindliche Metallfläche andrücken, damit sie angreift; 2.) muß er sie längst dieser Fläche vorwärtsstoßen und 3.) muß er sie mit einer gewissen Geschwindigkeit vor- und rückwärts bewegen und während dessen die Trägheit der Masse der Feile überwinden. Die Größe der wirklich geleisteten Arbeit ist also das Resultat dieser verschiedenen gleichzeitigen Wirkungen. Man kann jedoch diese gegenseitige Abhängigkeit gänzlich unberücksichtigt lassen, wenn man von der mechanischen Arbeit alles dasjenige absondert, was nicht unumgänglich zu berücksichtigen ist, und also in jenem Beispiele nur das betrachtet, was bei der Wegnahme des Metalles durch die Feile hervorgeht. Man nimmt nun wahr, daß nur ein Widerstand in der entgegengesetzten Richtung, in welcher sich die Feile bewegt, stattfindet, dessen Arbeit leicht auf die in den vorhergehenden Paragraphen angegebene Weise bestimmt werden kann; der ganze Hergang der Arbeit

der Kraft kann nun so betrachtet werden, als würde die Feile durch ein auf ihr ruhendes Gewicht gegen die in horizontaler Lage befindliche Metallfläche in einem solchen Grade angedrückt, daß sie anzugreifen im Stande ist und durch die thätige Kraft in dem Sinne ihrer Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit vorwärts gezogen wird.

41. Was man hauptsächlich unter mechanischer Arbeit einer Kraft versteht. — Wenn künftig die Frage von einer mechanischen Arbeit ist, so wird man in der Regel nicht anderes darunter verstehen, als die einfache Wirkung einer Kraft auf einen Widerstand, der ihr gerade entgegengesetzt ist, der continuirlich von jener zerstört wird und zugleich während dieser Wirkung einen gewissen Weg in der Richtung seines Angriffspunktes durchläuft. Die Kraft selbst ist als das einfache Bestreben, einen Druck, der durch ein Gewicht gemessen werden kann und fortwährend in der Richtung einer und derselben Linie stattfindet, hervorzubringen, zu betrachten. Man darf nicht, wie es häufig geschieht, die Ausdrücke der Arbeit und der Kräfte mit denjenigen verwechseln, womit man auf eine unbestimmte Weise alle die mehr oder weniger zusammengesetzten Wirkungen bezeichnet, welche durch die Äusserungen animalischer und elementarer Kräfte gegen vorhandene Widerstände stattfinden. — Wir sprechen also nicht von der Kraft eines Pferdes, eines Menschen oder einer Maschine, ohne darunter den Angriffspunkt, an welchem sie angebracht ist, ihre Intensität und ihre Richtung zusammengenommen, zu verstehen; wir sprechen nicht von ihrer mechanischen Arbeit, ohne gleichzeitig sich dabei einen eben so großen, in entgegengesetzter Richtung stattfindenden Widerstand, welchen die Kraft continuirlich fort zerstört, indem ihr Angriffspunkt auf der Richtung von jenem einen gewissen Weg durchläuft, zu denken.

42. Die vertikale Erhebung einer Last stellt das Maaß einer geleisteten

mechanischen Arbeit vor. — Die unmittelbare Idee von einer mechanischen Arbeit erhält man ganz einfach durch das Erheben einer Last in senkrechter Richtung; denn die Größe der mechanischen Arbeit nimmt augenscheinlich in diesem Falle mit der Größe des Gewichtes und der Höhe des vertikal. durchlaufenen Weges zu, d. h. sie wird durch das Produkt aus diesen beiden Größen gemessen. Wenn man z. B. auf die einfache Höhe (Wegeinheit) das doppelte, dreifache, nfache Gewicht, oder das einfache Gewicht (Gewichtseinheit) auf den doppelten, dreifachen, nfachen Weg erhebt, so wird augenscheinlich die doppelte, dreifache, nfache von derjenigen vernichtet, die man erhält, wenn die Gewichtseinheit auf die Längeneinheit erhoben wird. Wird also für die Einheit der Arbeit, die Gewichtseinheit auf die Längeneinheit erhoben, angenommen, so wird irgend eine andere Arbeit durch das Produkt gemessen, dessen beide Faktoren die Anzahl der Gewichtseinheiten und der Längeneinheiten ausdrücken.

Die Brauchbarkeit des so eben als Einheit angenommenen Maaßes der Arbeit liegt einestheils in dessen Einfachheit und anderntheils in dem Umstande, daß es mit Leichtigkeit die Kräfte oder die von ihnen hervorgebrachten Drückungen durch Gewichtseinheiten und die von ihnen zurückgelegten Wege durch Längeneinheiten angibt. Jedoch könnte auch der hervorgebrachte Nutzeffekt in gar vielen Fällen selbst als Maaß der mechanischen Arbeit der Kraft angenommen werden; so könnte man z. B. sagen: der Gang einer Mühle liefert in einer Stunde 175 (oder allgemein n) Pfunde Mehl, wenn dem Müller und Mühlenbesitzer es convenirt, mit dieser Zahl den relativen Werth der Arbeit seiner Mühle oder des zu ihrem Betriebe disponiblen Wassers anzugeben. Da aber dieselbe Quantität Getreide unter verschiedenen Umständen und bei verschiedenartigen Einrichtungen des Mahlapparates bald einen größern, bald einen geringern Widerstand beim Vermahlen entgegensetzt, so würde jene Annahme kein allgemein verständliches Vergleichungs-

maaß für die Größe einer Arbeit ausdrücken, weil man nicht leicht zwei verschiedenartig gebaute Mühlen finden wird, die in derselben Zeit und mit derselben Kraft dieselbe Quantität Mehl liefern. Um die Zweideutigkeiten, die in solchen Annahmen liegen, zu umgehen, ist ein für Jedermann verständliches allgemeines Maaß der Arbeit nothwendig, welches nicht varirt und keine willkührliche Deutung gestattet. Ein solches Maaß ist nun augenscheinlich dasjenige, das aus den eben stattgefundenen Betrachtungen hervorgeht, d. h.

ein Gewicht von bestimmter Größe, das in der Zeiteinheit einen ebenfalls bestimmten Weg durchläuft.

Ist einmal dieses Arbeitsmaaß festgesetzt, so ist dann nur noch die Frage: wie viele solcher Arbeitseinheiten erforderlich sind, um eine gegebene Quantität — z. B. ein Scheffel — Getreide zu vermahlen oder mittelst einer Säge einen Quadratfuß Bretter zu schneiden u. s. w. Zur Festsetzung solcher Zahlenwerthe kann man jedoch nur durch Beobachtung und durch anzustellende Versuche gelangen, wobei es aber als eine Hauptsache zu betrachten ist, daß alles Willkührliche bei der Schätzung der Arbeit vermieden werde.

43. Vorgeschlagene Benennungen für das Maaß der mechanischen Arbeit.

— Man hat der mechanischen Arbeit zu verschiedenen Zeiten verschiedene Benennungen gegeben. Smeaton, ein englischer Ingenieur, welcher eine für seine Zeit interessante Abhandlung über die Wasserräder geschrieben hatte, nennt sie mechanische Potenz; Carnot, Monge und Hachette, französische Mathematiker, nennen sie, und zwar Ersterer, Moment der Thätigkeit, Letztere dagegen dynamischen Effekt. Columb, Navier und andere französische Ingenieure nennen sie Größe der Wirkung, und unter dieser Benennung ist sie ziemlich — namentlich in Frankreich — verbreitet. Die hier angenommene Benennung: mechanische Arbeit gebrauchte

zuerst Coriolis in seinen Werken über Mechanik; dieselbe hat den Vortheil, daß sie, so zu sagen, sich selbst erläutert und ganz einfach die Sache bezeichnet. Bei gewissen Schriftstellern über Mechanik findet man zuweilen die Ausdrücke: Größe der Bewegung oder lebendige Kraft statt des Ausdruckes: mechanische Arbeit; vor dieser Verwechslung muß man sich aber wohl in Acht nehmen, da jene, wie wir später sehen werden, etwas ganz anderes bezeichnen als dieser.

Ein charakteristisches Unterscheidungsmerkmal der mechanischen Arbeit ist noch, daß sie das, was man bei der Anwendung der Kräfte in Geldwerth anzuschlagen im Stande ist, genau ausdrückt und daß also das Geld, das man für die Erlangung einer Kraft für bestimmte Zwecke zahlen muß, allemal der durch sie hervorgebrachten Arbeit proportional ist. Damit aber der Ausdruck: mechanische Arbeit auf keinerlei Weise mißverstanden wird, wiederholen wir nochmals, daß sie einen in Gewichten ausdrückbaren Widerstand, der in jedem Augenblick überwunden und in der Richtung des Angriffspunktes der Kraft wieder erzeugt wird, voraussetzt.

44. Die Arbeit der Kräfte in Zahlen auszudrücken. — Der im Vorhergehenden gegebenen Erklärungen zu Folge ist die mechanische Arbeit etwas Absolutes, das nur den Begriff von einer wirksamen Kraft und von einem von ihrem Angriffspunkte durchlaufenen Weg voraussetzt; aber ihr Ausdruck, in Zahlen genommen, kann nach Umständen und der zuvor stattgefundenen Übereinkunft gemäß vielfältig abgeändert werden, wobei es vorzüglich auf die Wahl der Größen ankommt, die man als Einheiten für die wirksame Kraft und für den von ihrem Angriffspunkte zurückgelegten Weg annimmt, und ob die in einer bestimmten Zeit vollbrachte Arbeit von gleichförmiger oder ungleichförmiger Art ist. Einestheils ist die Wahl der Kraft- und Wegeinheiten ganz willkührlich und die daraus entstehende Einheit der Arbeit ist es auch; anderntheils aber

kann diese, wenn die Arbeit eine lange Zeit fort beinahe gleichförmig verbleibt, durch die große Zahl, welche den zurückgelegten Weg in ihr ausdrückt, unbequem werden. In einem solchen Falle nimmt man der Einfachheit und der Bequemlichkeit wegen nur einen Bruchtheil des ganzen zurückgelegten Weges und zwar einen solchen an, welcher in einer gewissen Zeit — wofür man in der Regel die Sekunde oder Minute annimmt — beschrieben wird; auf diese Weise tritt freilich der Begriff der Zeit mit dem der Arbeit in Verbindung, obwohl diese, unter einem mehr absoluten Verhältniß betrachtet, von jener gänzlich unabhängig sein soll. So sagt man z. B. von einem Pferde oder einem Menschen, die eine Last ziehen, daß sie in der Minute oder Sekunde eine Kraft äussern, die so und so viel Pfunden gleich ist, oder von einer Maschine, daß sie in derselben Zeit den und den mittlern Effekt entwickelt u. s. w. Jedoch darf bei solchen Angaben die ganze Dauer der Arbeit nicht unbeachtet bleiben, namentlich wenn belebte Wesen die Arbeit verrichten, weil die Zeit, nach welcher sie abgelöst und durch andere, indessen ausgeruhte Individuen, ersetzt werden, dabei wohl zu berücksichtigen ist.

45. Die verschiedenen, für die Arbeit einer Kraft vorgeschlagenen Einheiten.

— Aus allem diesen geht nun klar hervor, daß es nicht so leicht ist, eine Einheit für die mechanische Arbeit anzugeben, die in allen möglichen Fällen mit gleichem Vortheil angewendet werden kann; denn bald ist der dafür gesetzte Zahlenausdruck aus zu vielen Ziffern zusammengesetzt, bald muß er, um genau zu sein, zu viele Decimalstellen erhalten; oder er ist von der Zeit, in der sie verrichtet wird, abhängig u. s. w. Man hat zwar stets die Wichtigkeit gefühlt, die Einheit der Arbeit festsetzen und ihr einen passenden Namen geben zu müssen, wie dies z. B. bei den Gewichten mit den Benennungen: Pfund, Kilogramm geschehen ist und es fanden zu diesem Zwecke verschiedene Vorschläge statt; allein man hat sich bis jetzt über keine der proponirten Ein-

heiten verständigt und wahrscheinlich wird man eben so wenig eine allgemein gültige Einheit der Arbeit anzugeben im Stande sein, als man bis jetzt eine allgemein gültige Einheit der Geschwindigkeit hat, da diese bekanntlich nicht allein von der Einheit der Zeit, sondern auch noch von der Einheit des landesüblichen Längenmaaßes abhängig ist.

Französische Techniker und Gelehrte, wie z. B. Mongolfier, Hachette, Clement, Coriolis ꝛc. haben einen Kubikmeter Wasser oder 1000 Kilogramme, auf die Höhe eines Meters erhoben, als Arbeitseinheit angenommen und erstere ihr den Namen: Dynamie, hingegen letztgenannter denjenigen: Dynamod gegeben; der durch seine populären Schriften über Geometrie und Mechanik bekannte Baron Carl Dupin schlug vor: 1000 Kubikmeter Wasser, auf einen Meter erhoben — die gleichsam eine in 24 Stunden geleistete Arbeit repräsentiren würden — als Arbeitseinheit anzunehmen und sie Dyname zu nennen, aber keine dieser Präpositionen hat bis jetzt in dem industriellen Leben Eingang gefunden.

Seit der Verbreitung der Dampfmaschinen auf dem Gebiete der Industrie hat man auf dem Kontinent das Beispiel derjenigen Engländer, die sich vorzugsweise mit dem Baue dieser Maschinen beschäftigten, nachgeahmt, und nahm, wie diese, die Kraft eines Pferdes als Einheit der Arbeit an. Da aber eine so bestimmte Kraft keineswegs etwas Bestimmtes ist, sondern theils von dem Alter, theils von dem Baue und der Beschaffenheit des Thieres abhängig ist, so nimmt man ein fingirtes Pferd von bestimmter Stärke an und nennt ein solches ein Dampfpferd oder ein Maschinenpferd, je nachdem eine Anzahl solcher Pferde die Wirkung einer Dampfmaschine oder irgend einer andern Maschinenvorrichtung ersetzen. Die Größe, womit man gewöhnlich die Leistung eines solchen fingirten Pferdes ausdrückt, hat man in Frankreich zu 75 Kilogramme auf einen Meter in der Sekunde erhoben festgesetzt, was so ziemlich mit der

Annahme Watts — des Reformators in dem Dampfmaschinenbau in England — übereinstimmt, welcher bei allen aus der unter der Firma: Watt und Boulton zu Soho errichteten Dampfmaschinenbau-Anstalt hervorgegangenen Dampfmaschinen die Kraft eines Pferdes zu 33000 engl. Pfunde, in der Minute auf einen engl. Fuß, oder 550 engl. Pfunde in einer Sekunde auf dieselbe Höhe erhoben, annahm. *)

Ohne indessen eine der in Vorhergehendem angeführten Annahmen zu verwerfen, indem sie allerdings in besondern Fällen ihre eigenthümlichen Vortheile haben können, nimmt Poncelet für die Einheit der Arbeit

1 Kilogramm auf 1 Meter in der Sekunde erhoben

an und drückt dieses durch

$$1^{k} \times m \text{ oder } 1^{k}.m \qquad (\alpha)$$

aus. Wir werden von hier an für die Arbeitseinheit

1 Pfund auf 1 Fuß in der Sekunde erhoben

in dem entsprechenden landesüblichen Gewicht und Maaß ausgedrückt setzen, und drücken solche durch

$$1^{\text{℔}}.f \quad **) \qquad (\beta)$$

---

*) Reducirt man diese für eine Pferdekraft angenommene Arbeitseinheit auf das Maaß und Gewicht irgend eines andern Staates, für welchen das Verhältniß des Kilogramms zu dem Pfunde durch α, des Meters zu dem Fuße durch β ausgedrückt ist, und bezeichnet man obige Arbeitseinheit mit A (= 75) die reducirte mit A_1, so ist

$$A_1 = \alpha.\beta.A.$$

Dies gibt die Arbeit eines Dampf- oder Maschinenpferdes, in runden Zahlen ausgedrückt, zu

550 engl. Pfunde auf 1 engl. Fuß in der Sekunde erhoben
510 preuß. „ „ 1 preuß. „ „ „ „ „
424 östreich. „ „ 1 östreich. „ „ „ „ „
458 bayr. „ „ 1 bayr. „ „ „ „ „

wie bereits im II. Theile Seite 167 näher angegeben ist.

**) Für diesen Ausdruck haben wir in Deutschland noch keine stabile Benennung; Hr. Prof. Desberger in München (gegen-

aus, weil man jede mechanische Arbeit und jeden Nutzeffekt mit dem Erheben eines Gewichtes in senkrechte Richtung vergleichen kann. Ist z. B. die wirksame Kraft durch 225 Pfund ausgedrückt und der von ihrem Angriffspunkte durchlaufene Weg betrage 7 Fuß, so ist

$$225^{\text{℔}} \times 7^{\text{f}} = 1575^{\text{℔.f}}$$

welcher Ausdruck nun auf gedoppelte Weise, nämlich a) 1575 Pfund auf einen Fuß oder b) 1 Pfund auf 1575 Fuß erhoben, gelesen werden kann. Ist die in (β) ausgedrückte Arbeitseinheit in manchen Fällen im Verhältniß mit dem hervorgebrachten Effekt eine zu kleine Zahl, so kann man auch 1 Centner auf 1 Fuß in der Sekunde erhoben, als Einheit der Arbeit annehmen, und diese so:

$$1^{\text{Ctr.f}}\ ^{*)} \qquad (\gamma)$$

schreiben.

46. Fehlerhafte Annahme des Ausdruckes der Arbeit. — Aus den im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen über das Maaß der Arbeit folgt nun augenscheinlich, daß von keiner geleisteten Arbeit die Rede

---

wärtiger Vorstand der dortigen polytechnischen Schule) hat dafür die Benennung Arbeitspfund vorgeschlagen, und dieses Wort scheint sehr gut für diese Bezeichnung gewählt. Wenn man daher die Arbeit einer Kraft oder den Nutzeffekt einer Maschine durch die Zahl A ausdrückt, so müßte diese so:

$$A^{\text{℔.f}}$$

angeschrieben werden, und worunter entweder APfunde auf einen Fuß oder 1 Pfund auf AFuße erhoben zu verstehen wäre. Wenn man dem Buchstaben A oberhalb rechts das Zeichen k.m beisetzt, so gibt dies zu erkennen, daß man unter dem Ausdruck

$$A^{\text{k.m}}$$

A Kilogramm auf 1 Meter oder 1 Kilogramm auf A Meter erhoben versteht.

*) Diesen Ausdruck der Arbeitseinheit könnte man der vorhergehendn Anmerk. zufolge mit dem Namen Arbeitscentner belegen.

sein kann, wenn entweder kein Weg zurückgelegt wird oder kein Widerstand zu überwinden ist. Würde man daher die Arbeit einer Kraft ausdrücken, wenn man sich nur mit der Angabe des von ihr ausgeübten Druckes gegen irgend ein Hinderniß begnügen wollte und den von ihrem Angriffspunkte zurückgelegten Weg in einer gewissen Zeit gänzlich unberücksichtigt ließe? — Wenn man z. B. die größtmögliche Leistung eines Menschen nur nach der Last, die er unterstützen oder gegen die Einwirkung der Schwere im Gleichgewicht erhalten könnte, oder eines an einem festen Hindernisse angespannten Pferdes nur nach dem Grade der Spannung des dazwischen angebrachten Dynamometers beurtheilen wollte, so würde man einen sehr großen Irrthum begehen. In denselben würde man aber ebenfalls verfallen, wenn man nur den von dem Angriffspunkte der Kraft beschriebenen Weg als die hervorgebrachte Arbeit betrachten würde und auf die in jedem Zeittheile stattfindende Wirksamkeit jener keine Rücksicht nähme; denn es ist klar, daß ein Mensch, welcher läuft, oder ein Pferd, das galoppirt, keine wahrnehmbare Arbeit — keinen Nutzeffekt — erzeugt. Mit einem Worte: wir wissen, daß jeder Ausdruck, mit welchem eine geleistete Arbeit bezeichnet wird, aus zwei Faktoren — dem der Größe der Kraft und dem des Weges — zusammengesetzt ist und daß man daher keinen derselben gleich Null machen darf, ohne daß zugleich der Ausdruck für die Arbeit selbst gleich Null würde.

47. Jede Kraftäusserung, selbst wenn diese gegen ein festes Hinderniß gerichtet ist, erzeugt einen gewissen Effekt, eine Arbeit. — Da fast alle Körper mehr oder weniger zusammendrückbar oder ausdehnbar sind, so folgern wir daraus, daß sogar eine gegen ein festes Hinderniß gerichtete bewegende Kraft eine gewisse Wirkung, eine mechanische Arbeit erzeugen muß. Denn die Stelle, an welcher sie angebracht ist, gibt, nach Maßgabe ihrer Intensität, in einem größern oder geringern Grade nach; der Körper wird daher

entweder gebogen, zusammengedrückt oder ausgedehnt und der Angriffspunkt der Kraft beschreibt folglich einen — zwar nur sehr kleinen — Weg auf ihrer Richtung. Im Beginne der Thätigkeit der Kraft ist die Gegenwirkung der moleculären Federkräfte des Körpers gleich Null, von da an nimmt diese zu, bis sie ihren größten Werth erlangt und der Körper durch die fortdauernde Einwirkung der Kraft die möglichst größte, durch sie erreichbare Formveränderung erlitten hat; in diesem Zustande verbleibt er so lange als die Kraft wirksam ist, ohne eine weitere Veränderung zu erleiden. Es wird also nur während der Zeitdauer, innerhalb welcher die Form des Körpers verändert wird, mechanische Arbeit erzeugt, so wie er aber eine bleibende Form angenommen hat, hört ihre Vermehrung auf.

In so fern man also im Stande ist, den von dem Angriffspunkt der Kraft durchlaufenen, sehr kleinen Weg, so wie das Gesetz, nach welchem die von den moleculären Federkräften des Körpers entstehenden Widerstände zunehmen, anzugeben, kann man die hervorgebrachte mechanische Arbeit nach der im Paragraph 36 angegebenen Methode bestimmen; denn stellen die Ordinaten bb', cc',... (Fig. 24) die stattfindenden Widerstände des Körpers am Ende der durchlaufenen Wege ab, ac ꝛc. dar, so wird, während die kleinen Wege ab, dc ꝛc. durchlaufen werden, die hervorgebrachte mechanische Arbeit durch die Flächen aa'b'b, bb'c'c ꝛc. ausgedrückt. Wenn also das Hinderniß oder der Körper um eine angebbare Größe ausgedehnt oder zusammengedrückt wird und der Angriffspunkt der Kraft während dieses Herganges den Weg ad beschreibt, so repräsentirt die Fläche aa'b'c'd'd die durch die bewegende Kraft erzeugte Arbeit.

48. Unter welchen Umständen diese Arbeit unbeachtet gelassen werden kann.

— In dem vorigen Paragraphen wurde dargethan, daß durch jede auf einen widerstandsfähigen Körper stattfindende Einwirkung einer Kraft eine gewisse Quantität mechanischer Arbeit hervorgebracht wird. In der Regel werden

aber den zum Übertragen oder zur Aufnahme der Wirkungen der Kräfte bestimmten Körpern solche Dimensionen gegeben, daß die von jenen Einwirkungen in diesen hervorgebrachten Formveränderungen als höchst unerheblich betrachtet werden können, daher ist die daraus entstehende Größe der mechanischen Arbeit in Vergleichung mit derjenigen, welche die bewegende Kraft, an und für sich betrachtet, hervorbringt, so unerheblich, daß es in allen ähnlichen Fällen gestattet ist, diese durch die Formveränderung der Körper entstehende Arbeit gänzlich vernachläßigen zu dürfen; die Arbeit einer Kraft kann aber auch noch in dem Falle vernachläßigt oder gleich Null gesetzt werden, wenn die Richtung dieser Kraft auf der Richtung der stattfindenden Bewegung senkrecht ist; denn jene bringt wohl nach ihrer Richtung einen Druck hervor, wenn aber durch diesen keine Widerstände hervorgerufen werden, so kann er längs der Richtung der Bewegung keine Arbeit erzeugen. Übt z. B. ein Mensch senkrecht gegen die Richtung, in welcher sich ein Fuhrwerk durch die Wirksamkeit eines Pferdes bewegt, einen Stoß aus, so wird dadurch die Arbeit des Pferdes weder vermehrt, noch vermindert; dasselbe ist der Fall, wenn gegen den Zugbaum eines Göpels, während das daran gespannte Pferd im Zuge begriffen ist, nach dessen Längenrichtung ein Druck stattfindet. In beiden Beispielen findet zwar durch den Stoß oder Druck ein Zusammendrücken der ihnen unmittelbar ausgesetzten Theile statt, wodurch allerdings eine Arbeit erzeugt wird, die jedoch in dem Sinne der stattfindenden Bewegung keine Wirkung hervorbringt. *) Es

*) Sehr häufig werden aber durch den senkrechten Druck gegen die Richtung einer bereits stattfindenden Bewegung anderweitige Widerstände hervorgerufen, die zwar die, in der Richtung dieser Bewegung hervorgebrachte Arbeit nicht vermehren, aber wohl vermindern können. Befindet sich das oben erwähnte Fuhrwerk, statt auf gewöhnlichem Terrain, auf einer Eisenbahn, so kann der gegen dasselbe stattfindende senkrechte Stoß oder

ist jedoch die aus dem Vorstehenden zu entnehmende Folgerung: daß durch den senkrechten Druck gegen die Richtung einer stattfindenden Bewegung keine Arbeit in dem Sinne dieser Bewegung erzeugt wird, nur unter der Voraussetzung zu nehmen: daß durch diesen senkrechten Druck keine anderweitigen Widerstände, die sich in der Richtung der Bewegung wahrnehmbar machen, hervorgerufen werden.

49. Horizontale Fortschaffung der Lasten. — Der Fall, wo ein Mensch oder ein Thier in horizontaler Richtung eine Last trägt, gehört zwar auch zu den in dem vorhergehenden Paragraphen betrachteten Beispielen, unterscheidet sich aber von jenen dadurch, daß die Last zwar in der Richtung der Bewegung vorwärts geschafft wird, aber kein Widerstand, der sich in der Richtung des Weges entgegensetzt, zu überwinden ist. Wenn ein belebtes Wesen auf einem horizontalen Wege eine Last trägt, so übt diese zwar senkrecht gegen die Richtung der Bewegung einen Druck aus, ruft aber längs derselben keinen Widerstand hervor; es wird daher keine mechanische Arbeit in dem von uns festgesetzten Sinne verrichtet, obgleich das Individuum während des Fortschreitens durch die auf ihm ruhende Last ermüdet, und endlich seine Kraft gänzlich erschöpft werden kann.

Druck ein Anlegen der Räder an die Schienen hervorbringen, wodurch ein Widerstand entsteht, der die Arbeit in der Richtung der Bewegung vermindert. In dem zweiten Beispiel wird durch den Druck in der Richtung des Zugbaumes an dem Zapfen der vertikal stehenden Welle des Göpels ein Reibungswiderstand erzeugt, der ebenfalls nicht unberücksichtigt gelassen werden dürfte. Man ersieht hieraus, daß durch die, gegen die Richtung einer Bewegung stattfindenden senkrechten Drückungen zwar nie eine Vermehrung, aber in den meisten Fällen eine Verminderung der Arbeit der Kraft, die längs der Richtung der Bewegung thätig ist, erfolgt.

Die auf diese Weise stattfindende horizontale Fortschaffung von Lasten ist daher die einzige Leistung, deren Maaß nicht auf die bisher erklärte Weise bestimmt werden kann. Wenn aber derselbe Mensch oder dasselbe Thier dazu verwendet wird, eine auf einem Schlitten, einem Wagen oder einem Boote befindliche Last in horizontaler Richtung vorwärts zu ziehen, so wird durch die Unebenheiten der Strasse an den Schienen des Schlittens oder an den Axen des Wagens und durch den Gegendruck des Wassers ein Widerstand stattfinden, der in der Richtung der Bewegung während deren Dauer zu überwinden ist, und der in dem Sinne, wie wir bereits zur Genüge angegeben haben, eine mechanische Arbeit erzeugt, die nach den festgesetzten Regeln gemessen werden kann. Man darf daher die Leistung eines Individuums, das eine Last trägt, nicht mit derjenigen, wo es dieselbe Last auf irgend einer Vorrichtung liegend oder ruhend fortzieht, verwechseln, sondern muß beide wohl unterscheiden. Es würde auch ein Fehler begangen, wenn man die Größe der Arbeit einer auf einem Wagen befindlichen Last, welche auf einem horizontalen Wege fortgeschafft wird, dadurch bestimmen wollte, daß man ihr Gewicht und dasjenige des Wagens zusammengenommen mit der Länge des zurückgelegten Weges multiplicirt. In diesem Falle würde augenscheinlich der hervorgebrachte Nutzeffekt mit der mechanischen Arbeit der verwendeten Kraft verwechselt; denn diese wird erhalten, wenn der Weg mit dem längs seiner Richtung entstehenden Widerstande multiplicirt wird. Wir werden auf diesen Gegenstand wieder zurückkommen, wenn wir im dritten Bande die Leistungen belebter Wesen speciell betrachten. Nur so viel sei hier noch erwähnt: daß jede mechanische Arbeit blos an und für sich, also unabhängig von dem Grade der Ermüdung des Individuums — in so fern die Kraftäusserung von einem solchen ausgeht — betrachtet werden muß.

50. Durch die Formänderungen der Körper kann in gewissen Fällen die Ar-

beit der Kräfte in einem solchen Grade gemindert werden, daß nur ein geringer und oft gar kein Nutzeffekt erzeugt wird. — Die bis hieher stattgefundenen Betrachtungen sind sehr wichtig, weil sie im Allgemeinen beweisen: daß Kräfte, ohne daß sie einen nützlichen Effekt hervorbringen, sich dennoch in Thätigkeit befinden können und für sich betrachtet eine gewisse Arbeit erzeugen, die jedoch dadurch, daß die verschiedenen, die Bewegung aufeinander übertragenden Theile, aus denen eine Maschine zusammengesetzt ist, sich gegenseitig zusammendrücken oder ausdehnen, zum Theil oder gänzlich vernichtet wird, so daß oft zur Hervorbringung eines Nutzeffekts entweder gar keine oder nur ein geringer Theil der Arbeit der Kraft übrig bleibt. Man folgert hieraus ferner: daß, wenn der Angriffspunct der bewegenden Kraft seine Bewegung in der Richtung derselben beginnt, diese Kraft einen gewissen Theil ihrer Arbeit vorerst darauf verwenden muß, um die zum Übertragen der Bewegung bestimmten Theile zuvor zu biegen, zusammenzudrücken oder auszudehnen, ehe die Bewegung gleichförmig oder regelmäßig wird, und daher die darauf verwendete Arbeit verloren ist, wenn sämmtliche Theile wegen Mangel der erforderlichen Elasticität die erlittene Formveränderung nicht wieder herzustellen im Stande sind, sondern in dem Zustande, in den sie versetzt worden sind, verharren, nachdem die Kraft auf sie einzuwirken aufgehört hat.

51. **Durch wiederholte Unterbrechungen der Wirksamkeit der Kräfte, so wie durch stattfindende Stöße entsteht Verlust an mechanischer Arbeit; in solchen Fällen ist es nothwendig, die Wirkungen der Kräfte zu reguliren und zu den Übertragungstheilen der Bewegung elastische Körper zu verwenden.** — Es ist leicht wahrzunehmen, daß in allen den Fällen, wo die Wirkungen

der bewegenden Kräfte oder die durch die Arbeit veranlaßten Widerstände häufige Unterbrechungen oder periodische Zu- und Abnahmen erleiden, ein sehr beträchtlicher Verlust an der gesammten Arbeit dadurch entstehen kann, daß diejenigen Theile, welche die Bewegung aufeinander übertragen, sich bald in ihrer ursprünglichen Gestalt, bald in zusammengedrücktem oder ausgedehntem Zustande befinden, was nicht geschehen würde, wenn die Wirkungen der Kräfte unverändert verblieben und nur beim Beginne und beim Aufhören der Arbeit varirten. Finden zugleich periodische Stöße statt, so bringen diese in den Körpern, die als Übertragungstheile der Bewegung dienen, sehr beträchtliche Pressungen hervor, und wenn diese bleibende Formveränderungen erzeugen, so ist jedesmal ein sehr großer Verlust an mechanischer Arbeit damit verbunden, der auf die (in 36) angegebene Weise geschätzt werden kann. Man ersieht hieraus, wie nothwendig es ist, den Einfluß des Stoßes niemals unberücksichtigt zu lassen, die Wirkungen der Kräfte — in so fern es möglich ist — zu reguliren und überall zu den Übertragungstheilen der Bewegung nur solche Körper zu verwenden, die durch die ihnen inwohnenden moleculären Federkräfte ihre ursprüngliche Form wieder herzustellen im Stande sind, wenn der gegen sie stattfindende Druck weggenommen wird, d. h. die einen hinreichenden Grad von Elasticität besitzen. Im Allgemeinen zieht man deswegen bei der Zusammensetzung der Maschinen Räder, die sich um feste Aren gleichförmig drehen, um entweder eine Bewegung überzutragen, oder um die Funktion eines Werkzeuges zu verrichten, anderen Combinationen vor, in so fern dies die Natur der zu verrichtenden industriellen Arbeit gestattet.

52. Vernichtung und Wiederherstellung der mechanischen Arbeit durch Federn. — Da nun die moleculären Federkräfte der Maschinentheile eine so wesentliche Rolle bei der zweckmäßigen Anordnung einer Maschine spielen, so erscheint es nothwendig, nachzuweisen, wie die Federkraft eines Körpers eine ge-

wisse mechanische Arbeit wiederherstellen kann, nachdem solche zuvor in Folge seines Zusammendrückens oder Ausdehnens vernichtet worden ist. Zu diesem Zwecke braucht man nur den Zustand sorgfältig zu erwägen, in dem sich ein Körper in dem Augenblick befindet, wo er beginnt, aus der durch die Zusammendrückung, Biegung oder Ausdehnung entstandenen Formveränderung wieder in seine ursprüngliche Gestalt zurückzukehren, und sich dabei alles dessen zu erinnern, was früher (36) über die, durch eine sich stets ändernde Kraft, hervorgebrachte Arbeit gesagt worden ist. Um sich jenen Zustand recht deutlich vergegenwärtigen zu können, wollen wir zuvor den Hergang von dem Augenblicke an, wo die Zusammendrückung beginnt, bis dahin, wo dieselbe im stärksten Grade stattgefunden hat, betrachten, und nehmen daher an: daß irgend eine Feder, z. B. **AB** (Fig. 29), auf welche in dem Punkte **A** nach einer bestimmten Richtung eine Kraft **P** wirkt, für den Zustand der größten Spannung in die Lage A_1B gebracht worden sei. Es ist augenscheinlich, daß, wenn in der Richtungslinie der Kraft **P** z. B. in **m** eine Federwaage angebracht wird, dieselbe für jede Lage der Feder A_1B den Grad der in A_2 stattfindenden Spannung angibt. Drücken wir nun den vom Angriffspunkte **A** beschriebenen Weg AA_1 durch die Linie **Od** (Fig. 30) aus, theilen diese in gleiche Theile **Oa = ab = bc = cd**, errichten in den Theilpunkten **a, b, c, d** die Ordinaten **aa′, bb′, cc′** und **dd′** und machen diese den in diesen Punkten stattfindenden Spannungen — in Pfunden, Lothen ꝛc. ausgedrückt — gleich, so stellt nach (36) für irgend einen Theil des ganzen zurückgelegten Weges, z. B. für **bc**, das Trapez **bb′c′c** die Größe der Arbeit dar; folglich wird die von **A** bis A_1 durch die Kraft **P** hervorgebrachte ganze Arbeit durch die Fläche **Oa′b′c′d′d**, welche zwischen der Kurve **Oa′b′c′d**, der Abscisse **Od** und der Ordinate **dd′** enthalten ist, ausgedrückt seyn. Jetzt wollen wir annehmen, daß die durch die Wirkung der Kraft **P** in die Lage A_1B gebrachte Feder der weitern Einwirkung dieser Kraft nicht

mehr unterworfen sei, daß sie dagegen einen in ihrer Richtungslinie befindlichen Widerstand zu überwinden habe. Indem sie nun allmählig in ihre ursprüngliche Lage zurückgeht, werden die von ihr gegen den Widerstand ausgeübten Drückungen mit den vorher in den correspondirenden Lagen stattgefundenen Spannungen übereinstimmen, d. h. sie wird während der Dauer ihrer Abspannung genau dieselbe Wirksamkeit als während ihrer Anspannung äussern, wenn innerhalb der Grenze ihrer größten Biegung ihre Elasticität als vollkommen zu betrachten ist und folglich ihre Moleculen keine bleibende Verschiebung erlitten haben; es ist mithin klar, daß die Größe der durch die Einwirkung der Feder auf den Widerstand erzeugten Arbeit dieselbe seyn wird, welche die Fläche **Oa'b'c'd'd** ausdrückt, folglich eben so groß als die durch die Anspannung der Feder erzeugte Arbeit ist. Ist hingegen die Feder nicht vollkommen elastisch, so wird sie ihre ursprüngliche Form nicht wieder annehmen und die während der Abspannung nach einander ausgeübten Drückungen werden eine geringere Wirksamkeit äussern, als diejenigen während ihrer Anspannung. Die durch jene hervorgebrachte Arbeit muß daher nothwendigerweise geringer als die durch diese erzeugte seyn; während der Anspannung geht also ein Theil derselben verloren, was offenbar eine Folge der stattgefundenen und bleibend gewordenen Verschiebungen der Moleculen ist, wodurch ein Theil der thätigen Kraft absorbirt wurde.

53. Die Federkraft der Körper kann als ein Mittel, die Arbeit anzusammeln und aufzubewahren, benützt werden. — Wir haben bereits in (6. f) gesehen, daß die atmosphärische Luft und die Gase die einzigen vollkommen elastischen und zugleich in sehr hohem Grade zusammendrückbaren Körper sind. Wenn man sie in hohle, von festen Körpern gebildete Räume einschließt und sie mittelst der bekannten Vorrichtungen bis zu einem gewissen Grade zusammenpreßt, so können sie in diesem Zustande als ein Magazin oder ein Reservoir von aufbewahrter Arbeit dienen. Verwendet man sie dann in diesem Zustande zur

Überwältigung eines Widerstandes in der Art: daß sie nicht plötzlich, sondern langsam ihre Wirkung äussern, so werden sie genau dieselbe Größe der Arbeit wieder erzeugen, die zuvor darauf verwendet werden mußte, um sie zusammen zu pressen; wir sagen ausdrücklich: daß die Übertragung ihrer Wirkung langsam geschehen müsse; denn fände sie plötzlich statt, so würde ein Theil der Arbeit zur Überwindung der Kraft der Trägheit ihrer Moleculen verwendet, der als ein Verlust zu betrachten wäre. Das bekannteste Beispiel eines solchen Arbeits-Reservoirs ist die Windbüchse, bei welcher in einem Behältnisse atmosphärische Luft comprimirt ist, die als eine in demselben aufbewahrte Quantität mechanischer Arbeit beliebig benützt werden kann, um Kugeln, wie mittelst der gewöhnlichen Feuergewehre, abzuschießen. Die im Alterthum angewendeten, unter dem Namen: Katapulten, Ballisten, Bogen und Armbrüste bekannten Maschinen und Vorrichtungen, um mittelst derselben Steine und Pfeile auf ziemliche Entfernungen fortzuschleudern, sind ebenfalls solche Arbeits-Reservoire, bei welchen zuerst durch das Anspannen einer mit biegsamen Holz- oder Metallstücken verbundenen Sehne eine Quantität Arbeit in ihnen angehäuft und hierauf durch ihr rasches Abspannen zu den eben bezeichneten Zwecken wieder verwendet wurde.

Die in einer Vorrichtung concentrirte Federkraft dient aber nicht blos zum Werfen der Körper, sondern man kann sie auch zur Bewegung von Maschinen verwenden und diesem gemäß industrielle Arbeiten mit ihr verrichten. Auf diese Weise setzen wir unsre Uhren durch eine in einem Gehäuse eingeschlossene, angespannte, stählerne Spiralfeder Tage, Wochen und selbst Monate lang in Bewegung. Die Elasticität der Körper gestattet uns also in trägen Körpern eine Kraft anzuhäufen und aufzubewahren, die eben so wie belebte Wesen eine Arbeit innerhalb gegebener Grenzen zu verrichten im Stande ist.

54. Erzeugung mechanischer Arbeit durch die Wärme. — Dadurch, daß die Wärme

alle Körper ausdehnt, indem sie zwischen ihre Moleculen tritt, und ihre Repulsionskraft in Thätigkeit setzt, ist sie im Stande, mittelbar eine mechanische Arbeit zu verrichten, d. h. wenn man der durch sie nach allen Seiten stattfindenden Ausdehnung eines Körpers, von aussen einen der Größe ihrer Wirksamkeit entsprechenden Widerstand entgegensetzt, so wird dieser überwunden und zugleich von dessen Angriffspunkt ein gewisser Weg beschrieben. Das Umgekehrte findet statt, wenn man einen vorher erwärmten Körper auf irgend eine Weise erkältet — ihn eines Theils seiner Wärme beraubt — so streben dessen moleculären Federkräfte wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückzukehren, und üben folglich gegen diejenigen Hindernisse, die sich ihrem Zurückgehen entgegensetzen, genau dieselbe Wirkung aus, als wenn zuvor der Körper durch äussere Kräfte nach allen Richtungen zu dem Grade, wie es vorher durch die Wärme geschehen ist, wäre ausgedehnt und dann sich selbst wieder überlassen worden. Den Erfahrungen zu Folge, die in dieser Beziehung gemacht worden sind, kann man annehmen: daß bei den durch Erwärmung oder Erkältung erzeugten Volumen-Veränderungen eines Körpers die Größe der durch die moleculären Federkräfte entwickelten Arbeit genau dieselbe sein wird, welche die Wirkungen äusserer, an ihm angebrachter Kräfte, die bei constant verbleibender Temperatur denselben Effekt erzeugen, hervorbringen.

Schon Seite 19 haben wir ein Beispiel angeführt, wie man mittelst der Wärme ausserordentliche Wirkungen hervorbringen kann; hier fügen wir noch bei, daß, wenn man Wasser in der Art in einem Flintenlauf einschließt, daß es auf keine Weise entweichen kann, und man es bis zu einem gewissen Grade erwärmt, dasselbe in Dampfform überzugehen strebt und in diesem Zustande gegen dessen innere Fläche einen Druck ausübt, der bei fortgesetzter gesteigerter Erwärmung ihn zuletzt zerreißt und die Trümmer nach allen Richtungen schleudert. Auch bei der Entzündung des Schießpulvers, welche so furchtbare Wirkungen zu Folge hat, ist die Wärme thätig.

In jenem wie in diesem Falle wird die explodirende Kraft durch die rasche Entwicklung der Dämpfe oder Gase, die nach allen Richtungen zu entweichen suchen, und durch ihre gleichzeitige Temperaturerhöhung verursacht. Auf denselben Erscheinungen beruhen auch diejenigen furchtbaren Unfälle, die zuweilen durch das Zerspringen der Dampfmaschinen-Kessel entstehen.

Da die festen Körper sich durch die Einwirkung der Wärme nur sehr wenig ausdehnen und die tropfbarflüssigen diese Eigenschaft mit ihnen theilen, in so fern sie nicht durch gesteigerte Erwärmung in Dampfform übergehen, so kann für industrielle Zwecke von jenen nur in sehr seltenen Fällen Gebrauch gemacht werden. Gase und Dämpfe hingegen haben die eben bemerkbar gemachten Nachtheile nicht, daher können diese — namentlich die Wasserdämpfe, deren Erzeugung ohnehin mit geringen Kosten geschehen kann — mit entschiedenen Vortheilen in dem Gebiete der Industrie als bewegende Kraft verwendet werden.

55. Erzeugung mechanischer Arbeit durch die Schwere. — Wie die Elasticität der Körper als ein Mittel dient, eine mechanische Arbeit aufzubewahren, eben so kann auch die Schwere zu gleichem Zwecke benützt werden. Denn wird durch eine bewegende Kraft ein Körper zu einer gewissen vertikalen Höhe erhoben, so ist die hiezu verwendete Quantität mechanischer Arbeit dem Gewichte des erhobenen Körpers, multiplicirt mit dem von ihm durchlaufenen Weg (Höhe), gleich. Wenn hernach dieser Körper zur Überwindung eines Widerstandes unmittelbar oder mittelst einer Maschine verwendet wird, so bringt er während seines Niedersteigens von derselben Höhe, auf welcher er zuvor erhoben wurde, genau die Größe mechanischer Arbeit hervor, die vorher, um ihn zu erheben, verwendet werden mußte. Das Gewicht, welches eine Wand- oder Thurmuhr, einen Bratenwender ꝛc. in Bewegung setzt, das gewöhnlich durch einen Menschen erhoben wird und dann durch sein langsames Niedersteigen die Wider-

stände jener Maschinen continuirlich überwindet, ist ein Beispiel von der Arbeit der Schwere, indem zuvor die Arbeit des Menschen in eine Arbeit der Schwere umgewandelt wurde. Wenn man Wasser in Teichen ansammelt oder in Flüssen durch Wehre aufstaucht, so bildet dasselbe ebenfalls eine angehäufte Arbeit der Schwere, die wir beliebig zur Bewegung der Wasserräder oder anderer hydraulischen Maschinen verwenden können.

Daß die Größe mechanischer Arbeit, welche während des Niedersteigens eines Gewichtes von einer gewissen Höhe hervorgebracht wird, genau derjenigen gleich ist, die auf dessen Erhebung zu derselben Höhe verwendet werden mußte, ist leicht daraus abzunehmen, daß die Intensität der Wirkung der Schwere nach (22) für solche Höhen, zu welchen für industrielle Zwecke gewöhnlich Körper erhoben werden, sich nicht wahrnehmbar verändert und sich folglich während des Auf- und Niedersteigens auf gleiche Weise äussert. Wenn man aber für sehr beträchtliche Höhen die stattfindenden geringen Veränderungen in der Wirkung der Schwere berücksichtigen und in der Rechnung aufnehmen wollte, so hat man nur zu erwägen, daß sich ihre Wirksamkeit während des Aufsteigens eines Körpers durch eine festgesetzte Höhe in demselben Grade vermindert, in welchem sie nachher während des Niedersteigens durch jene Höhe wieder zunimmt; es kann daher die Größe ihrer mechanischen Arbeit auf dieselbe Weise, wie diejenige einer vollkommenen elastischen Feder (52) bestimmt werden.

55 a. Die Wiederherstellung einer mechanischen Arbeit findet nicht mehr vollständig statt, wenn zugleich fremdartige Widerstände zu überwinden sind. — Die Wiederherstellung der durch die Schwere oder auf irgend eine andere Weise erzeugten mechanischen Arbeit wird nicht in allen Fällen wieder vollständig erfolgen, indem bei den meisten industriellen Arbeiten fremdartige Widerstände sich der

Bewegung entgegensetzen und die Wirksamkeit der Kräfte vermindern. Diese fremdartigen Widerstände, welche man gewöhnlich mit dem Namen: schädliche oder passive Widerstände bezeichnet, bestehen in den Widerständen der Luft und der Flüssigkeiten, der Reibung, der Adhäsion der auf einander gleitenden Körper ꝛc., welche allemal einen Theil der verwendeten Arbeit absorbiren, ohne ihn wieder zu ersetzen. Im Allgemeinen wird allemal ein gewisser Theil der mechanischen Arbeit vernichtet, wenn eine Verschiebung der Moleculen im Innern des Körpers oder in demjenigen, der ihn umgibt (wie z. B. in der jeden Körper umgebenden Luft), stattfindet. Dies ist z. B. der Fall mit der Arbeit, die durch das Feilen, Poliren, Brechen oder Theilen eines Körpers in Anspruch genommen wird, dieselbe ist ohne Wiedererſatz verloren; denn man hat einen Theil der moleculären Federkräfte zerstört, und die Moleculen eines festen Körpers, einmal von demselben getrennt, sind nicht mehr im Stande, die darauf verwendete Arbeit wieder herzustellen.

Man hat aber den Verbrauch derjenigen Arbeit, die einen bestimmten Nutzeffekt hervorbringt, von der so eben betrachteten wohl zu unterscheiden, die zur Überwindung der schädlichen Widerstände verwendet werden muß. Jene ist eine nützliche Arbeit, die einen Vortheil gewährt; diese ist es aber nicht, da sie nur Nachtheil bringt. Die schädlichen Widerstände kann man zwar durch eine zweckmäßige Anordnung einer Maschine sehr vermindern und zuweilen lassen sie sich innerhalb gewisser Grenzen auch gänzlich vermeiden, aber die zur Hervorbringung des Nutzeffekts verwendete Arbeit läßt sich auf keinerlei Weise verringern. Augenscheinlich folgt aus allen diesem, daß jeder hervorgebrachte Nutzeffekt eine bestimmte Quantität mechanischer Arbeit verbraucht. Wir werden in der Folge sehen, daß der Zweck, welchen man mit jeder Maschine zu erlangen sucht, darin besteht, mit der mechanischen Arbeit einer bewegenden Kraft einen solchen Nutzeffekt hervorzubringen, der, als Arbeit angeschlagen, jener möglichst nahe kommt.

Was wir im Vorstehendrn über Maschinen für industrielle Bedürfnisse gesagt haben, ist allgemein für alle in der Natur thätigen Kräfte gültig. Das in einem Reservoir angesammelte Wasser, welches aus einer darin angebrachten Öffnung hervorstürzt und durch sein Gewicht ein Wasserrad oder eine andere hydraulische Vorrichtung in Bewegung setzt, gelangt zuerst von höher liegenden Stellen, wo es aus dem Boden hervorquillt, in jenes; aber die Quellen, welche dieses Wasser liefern, werden durch den auf den Bergen niederfallenden und in das Erdreich eindringenden Regen gespeist; dieser fällt aus Wolken nieder, welche wiederum dadurch entstehen, daß die Sonnenwärme das Wasser an der Erdoberfläche verdünstet und der Richtung der Schwere entgegen erhebt. Die durch das Wasserrad hervorgebrachte mechanische Arbeit, welche wir benützen, ist daher nur eine sehr geringe von derjenigen, die durch die Wirkung der Sonnenwärme entsteht. Ferner sehen wir Lokomotiven und Dampfschiffe sich durch die Wirkung der Wasserdämpfe bewegen; diese bedürfen zu ihrer Hervorbringung Brennmaterial, dessen Gewinnung oder Beischaffung wieder eine Quantität vorausgegangener mechanischer Arbeit voraussetzt. Denn heitzt man z. B. die Dampfkessel jener Maschinen mit Steinkohlen, so müssen diese zuerst aus Gruben, in denen sie verschlossen sind, zu Tage gefördert und an dem Ort ihres Verbrauches entweder auf Wägen oder Booten, die wiederum durch Dampf- oder Thierkraft ihre Bewegung erhalten, geschafft und an demselben angelangt wieder abgeladen und in die Räume, wo man sie als Brennmaterial verwendet, gebracht werden. Wird Holz statt Steinkohlen als Feuerungsmaterial verwendet, so muß dieses zuerst im Forste gefällt, dann zerschnitten und gespalten und hierauf ebenfalls an den Ort seiner Bestimmung transportirt werden.

Wollte man nun in beiden Fällen berechnen, wie viel Arbeit die Beischaffung der Steinkohlen oder des Holzes erfordere, so würde man oft finden, daß diese vorausgehende Arbeit nicht sehr verschieden von derjenigen ist, welche durch

Verwendung des so erhaltenen Brennmaterials, um Wasser in Dampf zu verwandeln, der dann eine für irgend einen industriellen Zweck bestimmte Maschine in Bewegung setzt, hervorgebracht wird. Das Thier, welches auf einem Kanale ein Boot, oder auf einer Strasse ein Fuhrwerk zieht, bedarf, um diese Arbeit verrichten zu können, der Nahrung, deren Hervorbringung und Zubereitung die Arbeit anderweitiger Naturkraft in Anspruch nimmt. Es ist also wirklich unmöglich, eine bewegende Kraft herzustellen oder eine mechanische Arbeit zu veranlassen, ohne den Verbrauch einer ursprünglich stattgefundenen mechanischen Arbeit vorauszusetzen.

56. **Mechanische Arbeit der Trägheit der Körper.** — In dem vorhergehenden Paragraphen war diejenige mechanische Arbeit der Gegenstand unserer Betrachtungen, welche durch eine bewegende Kraft hervorgebracht werden muß, um die von der Schwere und von den moleculären Federkräften entstehenden Widerstände zu überwinden. Es ist noch übrig, den Widerstand, welchen alle Körper in Folge der Trägheit ihrer Masse der Bewegung entgegensetzen, und die Art, wie diese Trägheit als eine wirkliche Kraft betrachtet werden kann, die, wie die Schwere und die Elasticität, bald eine mechanische Arbeit verzehrt, bald wieder ersetzt, in nähere Untersuchung zu nehmen. In der That findet eine große Anzahl industrieller Operationen statt, bei denen die Trägheit eine Hauptrolle spielt; daher kann man sie in keinerlei Weise unberücksichtigt lassen, wenn es sich darum handelt, die Leistungen der bei den Maschinen in Anwendung tretenden, bewegenden Kräfte anzugeben. Wir haben früher angeführt, daß ein Arbeiter beim Feilen die Trägheit der Feile, das an einen Wagen gespannte Pferd die Trägheit des Fuhrwerks und der darauf befindlichen Last überwinden muß; wir haben früher wahrzunehmen Gelegenheit gehabt, daß die Trägheit in dem Augenblick, wo die Geschwindigkeit verändert wird, sich wie eine andere bewegende Kraft verhält. Daher ist es sehr wichtig, den Zuwachs oder die Abnahme der Größe der mechanischen Arbeit

in allen den Fällen bestimmen zu können, wo sich die Geschwindigkeit eines durch seine Dimensionen gegebenen Körpers plötzlich oder allmählig ändert, oder wo die bewegende Kraft nicht unmittelbar die Arbeit hervorbringt, sondern diese zuerst auf einen freien Körper wirkt und dessen erworbene Bewegung zur Hervorbringung einer mechanischen Arbeit, sei es durch Stoß oder auf irgend eine andere Weise, benützt, wie dieß bei Rammmaschinen, Hammerwerken, Schwungrädern stattfindet, wo die Trägheit der Materie dazu verwendet wird, um mittelst einer bewegenden Kraft eine gewisse Quantität mechanischer Arbeit in ihr anzuhäufen, die dann nachher auf entsprechende Weise wieder verbraucht wird.

IV.

Wirkung der zur Ueberwindung der Trägheit oder zur Bewegungsertheilung angewendeten bewegenden Kräfte. — Lebendige Kraft, Masse und Größe der Bewegung.

57. Constante Kräfte erzeugen gleichförmig veränderte Bewegungen. — Wenn eine Kraft nur einmal, d. h. während eines als augenblicklich zu betrachtenden Zeitraums auf einen Körper wirkt, so geräth er, wie früher gezeigt wurde, in eine gleichförmige Bewegung, welche er vermöge der Trägheit beibehält, bis eine äußere Ursache dieselbe ändert. Denkt man sich nun als diese Ursache die in jedem Augenblick in derselben Richtung wiederholte Thätigkeit jener Kraft, so wird der Widerstand, welchen die Trägheit in der Bewegungsrichtung entgegensetzt, auch in jedem Augenblicke von Neuem überwunden und der Geschwindigkeit in jedem nächsten Zeitelemente ein gleich großer Theil hinzugefügt oder nach Befinden entzogen werden. Die Summe aller dieser Aenderungen wird um so größer sein, je öfter sich jene Kraftäußerung wiederholt oder, was dasselbe ist, je längere Zeit hindurch die Kraft auf den Körper wirkt, so daß die Geschwindigkeit, von einem gewissen Augenblicke an gerechnet, sich der von diesem Augenblicke an verflossenen Zeit proportional vermehrt oder vermindert. Eine solche, gleichsam aus einer unendlichen Menge gleichförmiger Bewegungen von unendlich kurzer Dauer zusammengesetzte, Bewegung, deren Geschwindigkeiten in den aufein-

Bayerische Staatsbibliothek München

ander folgenden Augenblicken gleichmäßig wachsen, heißt eine gleichförmig veränderte Bewegung, und zwar eine gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte, je nachdem die Geschwindigkeit vermehrt oder vermindert wird. Die stetige Folge von gleichen Momentankräften, durch welche diese Bewegung hervorgebracht wird, nennt man eine constante Kraft.

Fängt die constante Kraft zugleich mit der Bewegung des Körpers zu wirken an, mit dem Augenblicke nämlich, in welchem der Körper aus der Ruhe in die Bewegung überging, so wird die am Ende irgend einer von da an verflossenen Zeit erreichte Geschwindigkeit dieser Zeit proportional sein. Hat dagegen der Körper schon eine Geschwindigkeit in dem Augenblicke, wo die constante Kraft auf ihn zu wirken beginnt, so wird diese Geschwindigkeit, welche man gewöhnlich die Anfangsgeschwindigkeit nennt, am Ende irgend einer von demselben Augenblicke an gerechneten Zeit, um einen Theil vermehrt oder vermindert, welcher immer noch proportional ist dieser Zeit. Die Geschwindigkeit in jenem Falle und die Zu- oder Abnahme der Anfangsgeschwindigkeit in diesem wird doppelt so groß sein für die doppelte Zeit, dreimal so groß für die dreifache Zeit u. s. f. Man wird sie berechnen können, sobald man nur die Geschwindigkeit kennt, welche die bewegende Kraft während einer Zeiteinheit beständig ertheilt oder vernichtet, denn sie ist nichts anderes, als das Product aus der verflossenen Zeit und dieser Geschwindigkeit. Fand eine Anfangsgeschwindigkeit statt, so darf man sie nur diesem Producte hinzufügen oder nach Befinden abziehen, um die Geschwindigkeit der Bewegung am Ende der betrachteten Zeit zu erfahren.

Da bei der gleichförmig veränderten Bewegung die Geschwindigkeit sich fortwährend ändert, in jedem Augenblicke eine andere ist, so kann unter der Geschwindigkeit eines so bewegten Körpers nur diejenige verstanden sein, die er in irgend einem gegebenen Augenblicke besitzt.

Bayerische Staatsbibliothek München

Die von da an eintretende Veränderung der Geschwindigkeit ist für den Augenblick, von welchem gerade die Rede ist, noch nicht vorhanden und die Geschwindigkeit wird daher durch denjenigen Weg gemessen, welchen der Körper in der nächsten Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn die Wirkung der bewegenden Kraft mit diesem Augenblicke aufhörte und der Körper sich nun gleichförmig bewegte. Eine solche gleichförmige Bewegung mit der in dem gegebenen Augenblicke erreichten Geschwindigkeit würde in der That auch in einem solchen Falle eintreten.

58. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren, wie dasjenige, durch welches das Maß der mechanischen Arbeit veränderlicher Kräfte gefunden wurde, können wir uns hier durch eine graphische Darstellung das Gesetz vergegenwärtigen, nach welchem die mittelst eines durch eine constante Kraft aus der Ruhe in Bewegung versetzten Körpers erlangten Geschwindigkeiten von den seit Anfang der Bewegung abgelaufenen Zeiten abhängen.

Stellen die Abscissen **Oa, ab, bc . . .** (Fig. 31) die während der Bewegung vergangenen Zeiten, sowie die ihnen entsprechenden Ordinaten **aa′, bb′, cc′ . . .** die am Ende dieser Zeiten erlangten Geschwindigkeiten vor, so ist für eine mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beginnende, gleichförmig beschleunigte, Bewegung wegen der Proportionalität der Geschwindigkeiten **aa′, bb′, cc′ . . .** und der zugehörigen Zeiten **Oa, Ob, Oc . . .** die Linie, **OX′**, welche die Endpunkte der Ordinaten verbindet, eine gerade durch den Anfangspunkt **O** gehende Linie. Sieht man nun die Abstände **Oa, ab, bc . . .**, also die Zeiten, als unendlich klein an und zieht durch **a′, b′, c′ . . .** Parallelen zur Abscissenare **OX**, so entsteht eine Reihe kleiner rechtwinkeliger und unter einander gleicher Dreiecke **Oaa′, a′b″b′, b′c″c′ . .**, deren Seiten **aa′, bb′, cc′** das allmählige Wachsthum der Geschwindigkeit bezeichnen und, wie die kleinen ihnen entsprechenden Zeiträume **Oa, ab, bc . . . .**,

ganz dem Begriffe der gleichförmig veränderten Bewegung gemäß, einander gleich sind.

Hinsichtlich der außerordentlichen Kleinheit der auf einander folgenden Zeitelemente **Oa**, **ab**, **bc** . . . wird man die Bewegung während jedes derselben als eine gleichförmige ansehen und eine mittlere Geschwindigkeit, dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}$ (cc′ + dd′) der Anfang und Ende dieses Zeittheilchens zukommenden Geschwindigkeiten cc′, dd′ gleich annehmen können, so daß der in der kleinen Zeit cd zurückgelegte Weg durch das Product $cd \cdot \frac{cc' + dd'}{2}$ aus eben der mittlern Geschwindigkeit und der Zeit cd sich ausdrücken läßt. Geometrisch betrachtet ist aber dieses Product nichts anderes, als der Flächenraum des kleinen Trapezes cc′d′d und dieses stellt daher den während des Zeitraums cd durchlaufenen Weg vor, sofern man denselben nur als abstracten Zahlenwerth ansieht. Auf solche Weise wird auch das Maß des Trapezes dd′e′e den während des Zeitelementes de zurückgelegten Weg repräsentiren und der Gesammtweg während der Zeit **Of** die Summe aller Elementartrapeze aa′b′b, bb′c′c, cc′d′d .... mit Einschluß des Dreiecks **Oaa′**, welches offenbar den im ersten Zeitelemente durchlaufenen Weg mißt, im Ganzen also das Dreieck **Off′** zum Maße haben.

Wir können nun aus dem Vorangegangenen mehrere wichtige Folgerungen ableiten, welche uns dazu verhelfen werden, Berechnungen über diese Bewegungsart anstellen zu können.

Zuvörderst sieht man, da der Inhalt des Dreiecks **Off′** die Hälfte des Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe und dieses wiederum das Maß des Weges ist, welcher gleichförmig während einer gleichgroßen Zeit **Of** mit der Geschwindigkeit ff′ durchlaufen worden sein würde, daß

1) bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung der nach Ablauf irgend einer Zeit

durchlaufene Weg, von der Ruhe an gerechnet, die Hälfte desjenigen ist, welchen der bewegte Körper in einer gleichgroßen Zeit zurücklegen würde, wenn er sich gleichförmig mit der Endgeschwindigkeit bewegte.

Weil ferner die während der Zeiten **Ob**, **Oe**... zurückgelegten Wege durch die Inhalte der Dreiecke **Obb'**, **Oee'**.... dargestellt werden konnten und diese Dreiecke ähnliche sind, deren Inhalte sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, so folgt, daß

2) bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung, bei welcher die Zeiten vom Uebergange aus der Ruhe in die Bewegung an gezählt werden, die am Ende zweier Zeiträume zurückgelegten Wege sich wie die Quadrate dieser Zeiten verhalten, und daß

3) diese Wege sich auch verhalten, wie die Quadrate der am Ende der entsprechenden Zeiten erlangten Geschwindigkeiten.

Da das Gesetz, welches die hier angenommene gleichförmig beschleunigte Bewegung befolgt, durch die gerade Linie, welche dasselbe repräsentirt, vollkommen festgestellt ist, so wird man auch aus der am Ende irgend einer Zeit **Of**, z. B. einer Zeitsecunde erlangten Geschwindigkeit **ff'** die Geschwindigkeit und den Weg für irgend eine andere Zeit construiren können.

Bezeichnen **s** und **p** Weg und Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde, **S** und **V** Weg und Geschwindigkeit nach Verlauf von **t** Sekunden vom Anfang der Bewegung an, so ist dem Begriffe der gleichförmig beschleunigten Bewegung zufolge $\frac{p}{V} = \frac{1}{t}$ und $V = pt$. Nach den obigen Sätzen ist aber auch 1) $s = \frac{v \times 1}{2} = \frac{v}{2}$ und $S = \frac{Vt}{2}$

2) $\frac{s}{S} = \frac{1}{t^2}$ oder $S = st^2 = \frac{pt^2}{2}$ und

3) $\frac{s}{S} = \frac{\frac{1}{2}p}{S} = \frac{p^2}{V^2}$ folglich $V^2 = 2pS$

Je zwei der Werthe S, V, t lassen sich mit Hülfe dieser Formeln jederzeit berechnen, wenn man den dritten, sowie den Weg s oder die Geschwindigkeit p für die erste Zeitsecunde kennt.

Während wir vorhin annahmen, der Körper sei durch die constante Kraft erst aus der Ruhe in Bewegung versetzt worden, wollen wir jetzt den Fall betrachten, wo der Körper zu Anfange der beschleunigten Bewegung schon eine gewisse Geschwindigkeit besitzt. Drückt die Linie OO′ (Fig. 32) diese Anfangsgeschwindigkeit aus und bezeichnen die Abscissen wiederum die Zeiten, in welchen die durch die Ordinaten dargestellten Geschwindigkeiten stattfinden, zieht man ferner die Parallele O′B′ zu OB, so ist offenbar die irgend einer seit Anfang O der beschleunigten Bewegung vergangenen Zeit entsprechende Geschwindigkeit cc′ aus der Anfangsgeschwindigkeit cc″ = OO′ und der Geschwindigkeit c′c″ zusammengesetzt, welche der Körper in der Zeit Oc = O′c″ erlangt haben würde, wenn wie im vorigen Falle seine Anfangsgeschwindigkeit Null gewesen wäre. Der in dieser Zeit zurückgelegte Weg aber muß durch das aus dem Dreiecke O′c″c′ und dem Rechtecke Occ″O′ bestehende Trapez Occ′O′ gemessen werden. Unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen für die Wege und Geschwindigkeiten und wenn die Anfangsgeschwindigkeit v beträgt, wird man daher für die Geschwindigkeit V und den Weg S die Ausdrücke

$V = v + pt$ und $S = vt + \frac{pt^2}{2}$ erhalten, und da das

Gesetz dieser Bewegung einmal festgestellt ist, so wird man im Stande sein, alle auf dieselbe bezüglichen Momente sowohl durch Construction als auch durch Rechnung auszumitteln.

59. Gleichförmig verzögerte Bewegung. — Soll eine gleichförmig verzögerte Bewegung stattfinden, so muß die constante bewegende Kraft, anstatt die Geschwindigkeit in jedem Zeitelemente um gleichviel zu vermehren, vielmehr dieselbe in jedem Augenblicke vermindern und es folgt von selbst hieraus, daß bei einer solchen Bewegung eine Anfangsgeschwindigkeit vorausgesetzt werden muß.

Betrachten wir diesen Fall, wie die vorhergehenden, in einer Zeichnung (Fig. 33), in welcher OO′ die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, so sehen wir, daß die Geschwindigkeit cc′ nach irgend einer Zeit Oc dem Unterschiede der Anfangsgeschwindigkeit OO′ oder cc″ und der Geschwindigkeit c′c″ gleich ist, welche der Körper erlangt haben würde, wenn er eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit Null Geschwindigkeit angefangen und die Zeit Oc hindurch fortgesetzt hätte. Denn da dieAbscissen O′a″, O′b″ .... Zeiten repräsentiren, so können die a′a″, b′b″ .. Ordinaten auch als die diesen Zeiten correspondirenden Geschwindigkeiten gedeutet werden.

Der Flächenraum des Trapezes OO′c′c, welcher hierbei den in der Zeit Oc mit gleichförmig verzögerter Bewegung durchlaufenen Weg vorstellt, ist dem um O′c′c″ verminderten Inhalte des Rechtecks OO′c″c′, also der Differenz der Wege gleich, welche einmal gleichförmig mit der Geschwindigkeit OO′, das andremal von der Ruhe aus gleichförmig beschleunigt, in der Zeit Oc zurückgelegt worden wären. Wir werden daher unsere für den zuletzt betrachteten Fall des vorigen Paragraphen gefundenen Ausdrücke für V und S auch auf die gleichförmig verzögerte Bewegung anwenden können, wenn wir die Summe in die Differenz verwandeln und $V = v - pt$, $S = vt - \frac{pt^2}{2}$ setzen. Hier wie dort können wir alle Bewegungsverhältnisse aus der Figur ableiten.

Wirkt die constante Kraft hinreichend lange, so muß ein Augenblick eintreten, wo die Anfangsgeschwindigkeit des

Körpers ganz vernichtet und Null geworden ist, und fährt die Kraft noch fort, auf ihn zu wirken, so wird der Körper alsdann umkehren und auf verschiedenen Puncten seines Wegs dieselben Geschwindigkeiten erlangen, welche er vorher an den nämlichen Puncten hatte. Man betrachte nur die Linie O'f und zähle die Zeiten von dem Augenblicke an, wo die Geschwindigkeit des Körpers Null geworden war, rückwärts von f nach O, so wird man finden, daß derselbe sowohl mit gleichförmig beschleunigter Bewegung zurückgehen, als auch nach Verlauf der Zeiten fe, fd, fc.... die Geschwindigkeiten ee,' dd,' cc'.... annehmen muß.

60. Senkrechte Fallbewegung der Körper. — Eine der wichtigsten gleichförmig beschleunigten Bewegungen zeigt sich uns in der Fallbewegung der schweren Körper, in der verticalen oder Loth-Richtung.

Wenn wir nach dem Früheren (§. 22) die Schwerkraft, welche diese Bewegung hervorbringt, als eine innerhalb der Räume, mit welchen wir es hier zu thun haben, constante Kraft betrachten können, so dürfen wir doch die durch sie erzeugte Fallbewegung nicht unbedingt für eine gleichförmig beschleunigte nehmen, weil es Ursachen giebt, welche dieselbe verändern. Eine solche Ursache ist das Medium, von welchem alle Körper auf unserer Erdoberfläche umgeben sind, nämlich die Luft, welche von allen Seiten auf die Körper drückt und, selbst ein materieller Körper, durch ihre Undurchdringlichkeit und ihre Trägheit jede Art von Bewegung mehr oder weniger hemmt.

Der Einfluß der Luft auf den Fall der Körper ist aber ein doppelter:

1) jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper verliert, wie in der Folge ausführlich gezeigt werden wird, genau so viel an Gewicht, als ein seinem Volumen gleiches Flüssigkeitsvolumen wiegt. Auch bei dem in der Luft befindlichen Körper wird folglich das Gewicht vermindert werden und zwar verhältnißmäßig um so mehr, je größer bei gleichen Gewichten die Volumina sind.

2) Vermöge der Trägheit und Elasticität setzt die Luft den fallenden Körpern einen Widerstand entgegen, der den Erfahrungen zufolge je nach Ausdehnung und Form der äußern Oberfläche verschieden ist und zugleich von dem Schnelligkeitsgrade der Bewegung abhängt. Man bewege nur eine flache dünne Platte, etwa ein Ruder, in der Luft und zwar in verschiedenen Stellungen der breiten Seite desselben gegen die Bewegungsrichtung und mit verschiedenen Geschwindigkeiten, so wird man die Bemerkung machen, daß der Widerstand bei gleichen Geschwindigkeiten um so kleiner ist, je mehr man die flache Seite gegen die Bewegungsrichtung neigt, daß er am kleinsten ist, wenn die scharfe Kante, am größten, wenn die breite Seite vorausgeht und daß er unter sonst gleichen Umständen mit der Geschwindigkeit der Bewegung wächst. Der Widerstand der Luft wird demnach 1) größer mit der Ausdehnung der gegen die Bewegungsrichtung gekehrten Oberfläche, 2) um so kleiner, je leichter die Luft dem Körper ausweichen und an seiner Oberfläche hingleiten kann, und 3) wiederum größer mit der Geschwindigkeit der Bewegung selbst, und zwar, wie wir später sehen werden, wachsen die Widerstände noch etwas stärker, als die Quadrate der Geschwindigkeiten.

In der That, wenn man Körper in der Luft von gleichen Höhen herabfallen läßt, so wird man immer diejenigen zuerst unten ankommen sehen, welche bei gleichem Volumen mehr wiegen, d. h. dichter sind und der Luft in der Richtung der Bewegung weniger Oberfläche darbieten, als andere. Eine massive Bleikugel wird demnach schneller fallen, als eine hohle von gleichem Umfange; denn es ist zwar die Verminderung des Gewichts und der Widerstand durch die Luft vermöge ihrer Trägheit und Elasticität bei beiden Körpern gleichgroß, allein sie ist von ganz verschiedenem Einfluß, weil das absolute Gewicht, das Gewicht im luftleeren Raume bei beiden sehr verschieden ist. Und irgend eine massive Holzkugel wird wiederum schneller fallen, als eine gleichschwere Korkholzkugel, weil letztere wegen ihres größern Rauminhalts und ihrer größern Oberfläche bei gleichem

Gewichte mit ersterer, einestheils mehr Luft verdrängt, anderntheils mehr Widerstand findet.

61. Fall im luftleeren Raume. Wirkungsart der Schwere. — Hätte man jene Körper statt in der Luft, im luftleeren Raume fallen lassen, so wäre das Hemmniß der Luft weggefallen und jeder derselben würde schneller seinen Fallraum zurückgelegt haben, und, so auffallend es auch für den ersten Augenblick scheinen mag, man würde alle diese Körper von gleicher Höhe auch mit gleicher Geschwindigkeit herabfallen gesehen haben. Den schwereren Körper bewegt allerdings eine größere Kraft, allein diese Kraft hat eben wegen des größern Gewichtes auch mehr Masse, eine größere Menge materieller Theilchen in Bewegung zu setzen, mehr Trägheitswiderstand zu überwinden.

Physiker haben in eine lange Röhre von Glas (Fig. 34) Körper von den verschiedensten Dichtigkeiten und Gewichten gebracht, die Röhre luftleer gemacht und gefunden, daß alle diese Körper gleichzeitig unten ankamen, wenn man sie gleichzeitig zusammen von einer und derselben Höhe herabfallen ließ, und daß sie während des Falles ihre gegenseitigen Abstände beibehielten. Wir haben demnach den Satz als für denselben Ort und den luftleeren Raum vollständig erwiesen, festzuhalten:

Die Schwere wirkt ohne Unterschied auf alle Theilchen der Materie und ertheilt ihnen in jedem Augenblicke denselben Geschwindigkeitsgrad.

Daß auf die innern Theilchen eines Körpers in gleicher Weise wie auf die äußern die Schwere wirkt, davon überzeugen wir uns leicht, wenn wir einen Körper in ein Gehäuse einschließen und wiegen. Sein Gewicht wird sich um nichts verändern, wenn man das Gewicht des Gehäuses selbst in Abrechnung bringt.

Die hier angestellten Betrachtungen zeigen zugleich, daß das absolute Gewicht eines Körpers nichts anderes ist, als das Resultat aller der kleinen Wirkungen der Schwere auf die sämmtlichen materiellen Theilchen des Kör-

pers. Sie führen uns dabei ferner auf den Unterschied der Begriffe von Gewicht und Schwere und stellen diese als die Elementarkraft dar, welche die Körpertheilchen in Bewegung setzt.

Versuche über den Fall der Körper haben übrigens dargethan, daß der Einfluß der Luft auf den Fall der meisten Körper für geringe, 5 Meter nicht übersteigende, Fallhöhen so unmerklich klein ist, daß er außer Acht gelassen und die Fallbewegung schwerer wie leichter Körper ganz gleich angenommen werden kann, wenn nur die Masse derselben im Verhältnisse zu ihrer Oberfläche nicht so außerordentlich klein ist, wie z. B. bei einem dünnen Papierblatte, einer Flaumfeder oder dergl.

Galilei war der erste, welcher den Fall der Körper als eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erkannte und Atwood, der mit noch sinnreicheren Apparaten experimentirte, bestätigte es vollkommen.

62. Gesetze des Falles im luftleeren Raume. — Wie für die gleichförmig beschleunigte Bewegung überhaupt, gelten für den freien Fall der Körper folgende Sätze:

1) die in verschiedenen Augenblicken erlangten Geschwindigkeiten sind den seit Anfang der Bewegung verflossenen Zeiten proportional;

2) die bis zu diesen Augenblicken durchfallenen Räume, die sogenannten Fallhöhen, sind den Qudraten der verflossenen Zeiten proportional;

3) diese Fallhöhen sind auch proportional den Quadraten der am Ende der entsprechenden Zeiten erlangten Geschwindigkeiten;

4) Die am Ende der ersten Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit ist doppelt so groß, als die Höhe, welche in dieser ersten Zeiteinheit durchlaufen wird.

Für unsere Gegenden ist die in der ersten Secunde im luftleeren Raume durchfallene Höhe 4,9044 Meter,

daher die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit $2 \cdot 4{,}9044 = 9{,}8088$ Meter *) Dieser Werth, welchen man gewöhnlich mit g bezeichnet, verhilft uns zur Ermittelung aller Bewegungsverhältnisse beim Falle der Körper und kommt in der Mechanik überhaupt außerordentlich oft in Anwendung.

Bezeichnet h die Höhe, von welcher der Körper herabgefallen ist, t die Zeit, welche er dazu brauchte, v die Geschwindigkeit, welche er am Ende dieser Zeit erreicht hat, so wird man nach dem, was über gleichförmig beschleunigte Bewegung überhaupt gesagt wurde, folgende Formeln erhalten:

$$h = \frac{v}{2}t;\ h = \tfrac{1}{2}gt^2;\ v^2 = 2gh \text{ und } v = \sqrt{2gh};\ v = gt$$

Formeln, von welchen in der Mechanik der ausgedehnteste Gebrauch gemacht wird.

Besonders häufig kommt in der praktischen Mechanik die Berechnung der Geschwindigkeit v aus der Fallhöhe h

---

*) Der Werth g = 9,8088 Meter ist auf unsere Maße reducirt

g = 33,6080 bayr. Fuß
= 31,0314 österr. Fuß
= 31,2528 preuß. Fuß.

Es entspricht g für den freien Fall dem, was wir bei der gleichförmig veränderten Bewegung im Allgemeinen mit p bezeichneten, und man nennt diese Größe hier die Beschleunigung der Schwerkraft. Manche Schriftsteller, besonders deutsche, bezeichnen jedoch den Fallraum in der ersten Secunde, 4,9044 Meter mit g und in diesem Falle hat man jedesmal den Factor $\frac{1}{2}$ beizufügen, um die Ausdrücke auf unsere Bezeichnungsweise zu reduciren. Findet man z. B. für die Fallhöhe den Ausdruck $v = gt^2$, so hat man $\frac{g}{2}$ für g und $v = \frac{1}{2}gt^2$ zu setzen, um jenen Ausdruck mit den von uns angewendeten Formeln in Uebereinstimmung zu bringen.

vor und es wird deshalb am Ende eine Tafel angehängt werden, welche für eine große Menge von Fallhöhen unmittelbar die entsprechenden Geschwindigkeiten angiebt.

63. Rechnungsspiele. — Will man die Geschwindigkeit und den Weg eines Körpers nach 7 Secunden vom Anfange des Falles an finden, so hat man für $t = 7$ zu setzen und erhält $v = gt = 33{,}608 \cdot 7 = 235{,}256$ bayr. Fuß und $h = \frac{g}{2} t^2 = \frac{vt}{2} = \frac{33{,}608 \cdot 49}{2} = \frac{235{,}256 \cdot 7}{2} = 823{,}396$ bayr. Fuß.

Wäre dagegen die Höhe des Falles $h = 100$ preuß. Fuß gegeben, so würde man die Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 31{,}2528 \cdot 100} = 79{,}06$ pr. Fuß und die Zeit, welche der Körper bedurfte, um die Höhe von 100 Fuß zu durchfallen, aus $h = \frac{1}{2} g t^2$ zu $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{31{,}2528}} = 2{,}529$ Sec. finden.

Um eine fernerweite Anwendung der vorigen Sätze zu zeigen, wollen wir einmal annehmen, es fielen zwei Körper von dem Puncte **A** (Fig. 35) aus, wo sie sich vorher in Ruhe befanden, vertical herab, doch nicht gleichzeitig die Bewegung anfangend, sondern der eine um einen Zeitraum von $\frac{1}{100} = 0{,}01$ Sec. später als der andere. Man kann nun fragen, in welchem Abstande **A'B'** beide Körper sich nach der 1sten, 2ten, 3ten u. s. f. Secunde vom Anfange der Bewegung des zweiten Körpers an befinden werden. Es ist klar, daß der erste Körper schon einen gewissen Weg durchlaufen haben wird, wenn der zweite seine Bewegung anfängt, und legen wir bayerisches Maß zum Grunde, so wird dieser Weg $h = \frac{gt^2}{2} = \frac{33{,}608}{2} (0{,}01)^2 = 0{,}00168$ bayr. Fuß, d. h. die Entfernung beider Körper wird noch weniger betragen als $\frac{1}{4}$ Linie. Der gegenseitige Abstand

beider Körper eine Secunde später ergiebt sich leicht aus den Wegen der beiden Körper; denn da für den zuerst abgegangenen die Fallzeit 1,01 Sec. und der durchlaufene Weg $AB' = \frac{33{,}608}{2} (1{,}01)^2 = 17{,}142$ bayr. Fuß und für den andern die Fallzeit 1 Sec. und der Fallraum $AB = \frac{33{,}608}{2} . 1^2 = 16{,}804$ bayr. Fuß ist, so wird ihr Abstand jetzt $A'B' = AB' - AB = 17{,}142 - 16{,}804 = 0{,}338$ bayr. Fuß betragen. Durch Wiederholung dieser Rechnung für die 2te, 3te ꝛc. Secunde gelangt man auf Abstände von nahe $\frac{4}{3}$, 2 ꝛc. Fuß, und wenn man überhaupt die Zeit, um welche der eine Körper seine Bewegung früher anfängt, als der andere, mit τ bezeichnet, so erhält man ganz allgemein den Abstand der beiden Körper

$$\frac{g}{2} (t + \tau)^2 - \frac{g}{2} t^2 = \frac{g}{2} [(t + \tau)^2 - t^2]$$

$$= \frac{g}{2} \tau (2t + \tau),$$

woraus sich die Zunahme desselben mit der Zeit t unzweifelhaft ergiebt. Hieraus können wir uns recht gut erklären, weshalb der als zusammenhängender Wasserfaden aufsteigende Strahl eines Springbrunnens oder einer Spritze beim Zurückfallen sich in Tropfen, in mehr oder weniger feinen Regen auflöst. Das Voreilen jedes fallenden Wasserelementes vor dem nachfolgenden ist die Ursache davon, nicht der Widerstand der Luft, denn dieser wirkt vielmehr auf die Wiedervereinigung der Wasserelemente zu einem Strahle hin, in dem er die Schnelligkeit der vorausgehenden Wassertropfen vermindert. Die bekannte Erscheinung, vermöge welcher das Wasser der Sturzbäche, welche von bedeutenden Höhen herabstürzen, sich während des Herabfallens in feinen Regen zertheilt, ja selbst in Nebel auflöst, findet in Obigem ebenfalls ihre Erklärung.

64. Verticales Aufsteigen der Körper. — Wird ein Körper senkrecht in die Höhe geworfen, so wirkt

die Schwere in jedem Augenblicke mit gleicher Stärke auf ihn und vermindert in gleichen Zeiten seine Anfangsgeschwindigkeit um gleichviel. Die Bewegung ist daher eine gleichförmig verzögerte. Bei einer gewissen Höhe wird die ganze Geschwindigkeit durch die Schwere vernichtet seyn, der Körper wird nunmehr der Wirkung dieser allein folgen, wieder herabfallen und alle Geschwindigkeitsgrade wieder annehmen, welche er an den gleichen Stellen beim Aufsteigen hatte. Wieder an der Stelle angelangt, von welcher der Körper ausging, wird er auch die ursprüngliche Geschwindigkeit wieder erreicht haben, so daß, wenn **v** diese Geschwindigkeit und **h** seine größte Erhebung bezeichnet, auch hier die Ausdrücke $v^2 = 2gh$ und $v = \sqrt{2gh}$ des 62ten § gelten. Wenn nun noch **V** seine Geschwindigkeit und **H** seine Erhebung nach irgend einer Zeit **t** vom Anfange der Bewegung bedeutet, so ist auch nach §. 59

$$V = v - gt \text{ und } H = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Daß hierbei der Einfluß der Luft außer Acht gelassen ist und die Körper sich eigentlich auf eine etwas geringere Höhe erheben und um so mehr beim Wiederherabfallen eine geringere Geschwindigkeit erreichen, als die Rechnung giebt, darf nicht vergessen werden.

65. Die der Fallgeschwindigkeit entsprechende mechanische Arbeit. — Um die Größe der Arbeit auszudrücken, welche die Schwerkraft zur Ertheilung einer gewissen Geschwindigkeit oder, was dasselbe ist, zur Ueberwindung der Trägheit eines Körpers beim Fallen aufwendet, bezeichne **P** das Gewicht des Körpers und **h** die Höhe seines Falls. Da **P** nichts andres, als das Maß der von der Schwere beständig ausgeübten Kraft ist, so wird die durch die Schwerkraft entwickelte und durch die Trägheit des Körpers in Anspruch genommene Arbeitsgröße dem Producte **Ph** gleich sein. Das Ergebniß dieser Arbeit ist die Geschwindigkeit **v**, dem Körper vom Gewichte **P** mit-

getheilt, während derselbe von der Höhe h herabfiel, und da nun $v^2 = 2gh$ und $h = \frac{v^2}{2g}$, so läßt sich für Ph auch $\frac{Pv^2}{2g}$ oder $\frac{1}{g} \frac{P}{g} v^2$ setzen.

Wird dagegen ein Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit vertical in die Höhe geworfen, so wird die Arbeit der Schwere, das Product aus Gewicht und senkrechter Erhebung des Körpers, darauf verwendet werden, die Geschwindigkeit desselben zu vernichten. Es wird daher das Maß der Arbeit ganz dasselbe sein, ob durch die Schwere dem Körper eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt wird oder ob die Schwere ihn aus dieser Geschwindigkeit in Ruhe bringt.

Wir werden uns in der Folge überzeugen, daß dieser Satz auch auf alle andern bewegenden Kräfte und jede Art der Bewegung Anwendung findet, vorausgesetzt, daß die bewegende Kraft in der Richtung der Bewegung wirkt und die Bewegung selbst veranlaßt hat.

66. Die lebendige Kraft der Körper und ihre Beziehung zur mechanischen Arbeit. — Das Product $\frac{Pv^2}{g}$ heißt in der Mechanik die lebendige Kraft des Körpers vom Gewichte P und von der Geschwindigkeit v und man sieht, daß die mechanische Arbeit, durch welche die Schwere den verticalen Fall desselben Körpers bewirkt und ihm die Geschwindigkeit v ertheilt, die Hälfte der lebendigen Kraft des Körpers am Ende des Falls ist, oder umgekehrt diese das doppelte jener.

Um Irrungen zu verhüten, bemerken wir, daß der Ausdruck lebendige Kraft nicht eigentlich eine Kraft, sondern vielmehr die Größe einer Wirkung oder Arbeit, das Resultat der Thätigkeit einer bewegenden Kraft oder eines Druckes bedeutet, durch welchen die Trägheit eines Körpers überwunden wird. Es ist zwar unrte diesem

Gesichtspuncte die lebendige Kraft $\frac{Pv^2}{g}$ das Doppelte des dynamischen Effects $\frac{1}{2}\frac{Pv^2}{g}$ oder **Ph**; doch werden wir, ohne der Benennung lebendige Kraft sonst irgend eine Bedeutung zuzugestehen, uns derselben nur bedienen, um damit den numerischen Werth einer auf die Bewegung eines Körpers bezüglichen Größe, nämlich das Product aus dem Gewichte und dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch die Beschleunigung g der Schwerkraft, zu bezeichnen.

67. Betrachtungen über die lebendige Kraft und die bewegenden Kräfte im Allgemeinen. — Der Ausdruck lebendige Kraft verdankt seine Entstehung einer Verwechselung von Wirkung und Ursache, des Arbeitsergebnisses einer bewegenden Kraft mit der Arbeit selbst, zu welcher man sich dadurch verleiten ließ, daß die Maße der Arbeit und ihres Ergebnisses in einer gewissen numerischen Beziehung stehen und unter einander vergleichbar sind. Indem man den Ausdruck Kraft zur Bezeichnung der Effecte angenommen hatte und diese doch auch wieder von den blosen Pressungen unterscheiden wollte, bezeichnete man jene durch lebendige Kräfte, diese durch todte Kräfte.

Früher (im 55ten §) wurde gezeigt, wie ein auf eine Höhe erhobener Körper die Quelle einer Arbeitsgröße werden kann, welche sich wirklich zur Erzeugung mechanischer Arbeit verwenden läßt. Aber ebensowenig wie wir deßhalb diesen Körper oder etwa eine gespannte Feder eine Kraft nennen dürfen, ebensowenig ist es richtig, einen in Bewegung befindlichen Körper oder das Product $\frac{Pv^2}{g}$ eine Kraft zu nennen.

Ein gewisser dynamischer Effect, ein in Bewegung gesetzter Körper kann zwar wirklich die Quelle mechanischer Arbeit werden, alsdann ver hält es sich aber damit, wie mit der Arbeit einer gespannten Feder. Die durch mechanische Arbeit überwundene Trägheit eines Körpers wird nämlich

auf dieselbe Weise wirksam, wie die Molecularkräfte einer durch irgend eine Arbeitsgröße gespannten elastischen Feder; sie ist eben so gut im Stande, die zu ihrer Ueberwindung aufgewendete Arbeit zu restituiren, wie die gespannte Feder. Mit einem Worte, die Trägheit kann wie die elastischen Federn mechanische Arbeit in sich anhäufen, indem sie dieselbe in lebendige Kraft verwandelt, welche als mechanische Arbeit beliebig verwendet werden kann. Die Aufgabe der Mechanik besteht nun hauptsächlich darin, die verschiedenen Verwandlungen und Gestalten zu erforschen, deren die mechanische Arbeit der Motoren mit Hülfe der Maschinen oder Werkzeuge fähig ist, die Größen dieser Arbeit mit einander zu vergleichen und nach dem ökonomischen Effecte zu schätzen.

68. Die Masse eines Körpers. — Da die Schwere durchaus auf alle materiellen Theile wirkt und jedem einen gleichen Geschwindigkeitsgrad zu ertheilen strebt, so wird auch für einen und denselben Ort das Gewicht, als Resultat aller der einzelnen Wirkungen der Schwere, den Maßstab für die Menge jener materiellen Theile, d. h. für die Masse abgeben können. Wegen dieser, jedoch bedingungsweise, stattfindenden Proportionalität zwischen Masse und Gewicht nehmen Manche für die Masse das Gewicht selbst. Wenn man aber berücksichtigt, daß die Intensität der Schwerkraft an verschiedenen Orten verschieden ist, während doch die Masse sich durchaus nicht ändert, so ist offenbar die Masse durch das blose Gewicht in gewissen Fällen nicht richtig erklärt. Der Ausdruck $\frac{P}{g}$ dagegen ist für alle Orte stets gleich, weil nach allen Erfahrungen die Beschleunigung g der Schwere stets proportional der Intensität derselben ist. Wenn daher P und P' den Druck eines Körpers an zwei verschiedenen Orten, g und g' die Beschleunigungen ebendaselbst bezeichnen, so ist

$$P : P' = g : g' \text{ und } \frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}.$$

Dieser unveränderliche Quotient $\frac{P}{g}$ und nicht das Gewicht **P** selbst entspricht der Definition der Masse eines Körpers. Gewöhnlich bezeichnet man den Werth der Masse eines Körpers durch den Buchstaben **M**, so daß $M = \frac{P}{g}$ und $P = Mg$ ist und der frühere Ausdruck $\frac{P}{g} v^2$ für die lebendige Kraft auch mit Mv^2 dem Producte aus der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit gleichbedeutend ist.

69. Größe der Bewegung eines Körpers. — Das Product aus der Masse (in dem eben angegebenen Sinne genommen) und ihrer Geschwindigkeit, den Werth Mv oder $\frac{Pv}{g}$, bezeichnen manche Mechaniker mit dem Ausdrucke Größe der Bewegung. Dieselbe ist, wie man wahrnehmen wird, ganz verschieden von der Größe der Wirkung oder der Arbeit und darf nicht mit dieser verwechselt werden, wenn man nicht denselben Fehler begehen will, wie bei der Verwechselung der Kraft eines Motors mit seinem Gewichte oder seiner Masse.

Uebrigens werden die Benennungen Masse, Größe der Bewegung nur der Einfachheit des Ausdrucks wegen angewendet und zur Abkürzung des Calcüls mit besonderen Buchstaben bezeichnet; man könnte leicht sich ihrer ganz enthalten, gleich wie des Ausdrucks lebendige Kraft. Allein, da sie ziemlich allgemein im Gebrauche sind, wird es doch nöthig sein, sich mit ihrer Bedeutung genau vertraut zu machen.

70. Verhalten der bewegenden Kräfte zu den hervorgebrachten Bewegungen. — Die Schwerkraft ertheilt, wie wir oben gesehen haben, an verschiedenen Orten einem und demselben Körper am Ende der ersten

Secunde Fallgeschwindigkeiten, welche der jedesmaligen Intensität derselben proportional sind, weil die Schwerkraft in der ganzen Fallhöhe sich so gut wie gar nicht ändert und deßhalb die Geschwindigkeitszunahmen in einem Zeitelemente den Geschwindigkeiten am Ende einer Secunde proportional sind. Dieß ist aber nicht mehr der Fall bei einer veränderlichen Kraft und es wird die Größe einer solchen aus diesem Grunde auch nicht mehr durch die am Ende der Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit gemessen werden können, sondern vielmehr von demjenigen kleinen Geschwindigkeitszuwachse abhängen, welchen sie dem Körper in dem Augenblicke mittheilt, wo man ihre Intensität wissen will.

Nach einem der ganzen Mechanik zur Grundlage dienenden und aus den Bewegungen auf unserer Erde sowohl, als auch in unserem Planetensystem abgeleiteten Erfahrungssatze sind nun auch die bewegenden Kräfte wirklich den während gleicher und unendlich kleiner Zeiten einem und demselben Körper ertheilten Geschwindigkeitsänderungen proportional.

Ein für allemal sei hierbei bemerkt, daß man sich bei allen diesen Betrachtungen die sämmtliche Masse eines Körpers in einem Puncte vereinigt und die Kräfte in der Richtung der Bewegung selbst auf diesen Punct wirkend, oder die einzelnen Theile des Körpers alle in mit der Kraftrichtung paralleler Bewegung zu denken hat.

71. Maß der bewegenden Kräfte und der Trägheit durch die ertheilte Geschwindigkeit und umgekehrt dieser durch jene. — Bezeichnet **K** das Maß einer Druckkraft in Gewichtseinheiten, **v** die Geschwindigkeitszunahme während irgend einer verschwindend kleinen Zeit **t**, **P** das Maß der Schwere dieses Körpers an irgend einem Orte und **v'** die ihr entsprechende Geschwindigkeitszunahme in demselben Augenblicke **t**, so erhält man nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{K}{P} = \frac{v}{v'} \text{ und } K = \frac{Pv}{v'}, \text{ und da nach §. 62 } \frac{v'}{g} = \frac{t}{1} \text{ oder}$$

$v' = gt$ ist, so folgt $K = \frac{Pv}{gt} = \frac{Mv}{t}$, wenn M wie früher die Masse bezeichnet.

Der eben gefundene Ausdruck $K = \frac{Mv}{t}$ zeigt also, daß die Kraft K und die ihr entgegenwirkende Trägheit des Körpers proportional seiner Masse und den Geschwindigkeitszunahmen wächst, und daß, da jener Ausdruck auch $v = \frac{Kt}{M}$ giebt, diese Geschwindigkeitszunahmen, welche die bewegende Kraft während eines unendlich kleinen Zeitelementes ertheilt, mit den Intensitäten der Kräfte in diesen Augenblicken in gleichem Maße zu-, mit der Masse des Körpers aber abnehmen.

Man wird daher jederzeit, wenn man die Geschwindigkeitszunahme v in dem Zeitelemente t kennt, die Kraft K in diesem Augenblicke, oder was dasselbe ist, den dieser Kraft durch die Trägheit des Körpers entgegengesetzten Widerstand, die sogenannte Kraft der Trägheit, finden können. Uebrigens ist leicht einzusehen, daß, wenn man statt der zunehmenden Geschwindigkeit eine abnehmende annimmt, das Vorstehende auch für diesen Fall, mithin auch für Kräfte gilt, welche die Bewegung hemmen, für wirkliche Widerstände, welche sich der zur Kraft gewordenen Trägheit entgegensetzen.

72. Beziehung der bewegenden Kräfte zu den ertheilten Bewegungsgrößen. — Nehmen wir neben der vorigen Kraft K noch eine zweite Kraft K′ an, welche während des Zeitelementes t der Masse M′ die Geschwindigkeitsveränderung v′ ertheilt, so erhalten wir diese Kraft durch $K' = \frac{M'v'}{t}$ ausgedrückt, so daß, da $K = \frac{Mv}{t}$

war, auch $K : K' = \frac{Mv}{t} : \frac{M'v'}{t} = Mv : M'v'$ sein wird.

Für $K = K'$ wird $\frac{Mv}{t} = \frac{M'v'}{t}$ und $Mv = M'v'$, und es werden demnach für gleiche Kräfte oder gleiche Trägheitswiderstände die in dem Zeitelemente t ertheilten oder erlangten Bewegungsgrößen ebenfalls gleich sein.

Verändern sich die auf zwei verschiedene Körper wirkenden Kräfte ganz auf gleiche Weise, so werden die den Körpern innerhalb einer gewissen Zeit von ihnen mitgetheilten Bewegungsgrößen im Ganzen einander auch gleich sein, denn die eine wird immer der Inbegriff aller einzelnen Mv, die andere die Summe aller einzelnen M'v' sein.

73. Neues Mittel, die bewegenden Kräfte und die Trägheit zu messen. — Fassen wir irgend einen Zeitpunct einer veränderlichen Bewegung in's Auge, und nehmen wir an, die Kraft würde von diesem Augenblicke an constant, so würde von da an die Bewegung eine gleichförmig veränderte sein und die Geschwindigkeiten würden der Zeit proportional zu- oder abnehmen. Stellen wir uns nun die Kraft in dieser Weise eine Secunde lang fortwährend vor, so wird die Geschwindigkeit, in welche sie den Körper am Ende derselben von der Ruhe aus versetzen könnte, als das Maß der Intensität der Kraft während dieser Zeit dienen können. Ist daher V diese Geschwindigkeit und gelten übrigens die früheren Bezeichnungen, so muß

$V : v = 1 : t$ und $V = \frac{v}{t}$, folglich auch

$$K = \frac{Mv}{t} = MV \text{ sein.}$$

Es kann daher eine veränderliche Kraft in irgend einem Augenblicke durch die Bewegungsgröße gemessen werden, welche sie am Ende einer Secunde ertheilt haben würde, wenn sie von diesem Augenblicke an mit unveränderter Stärke

fort- und auf einen vorher in Ruhe befindlichen Körper gewirkt hätte.

Man kann diese Betrachtungen über die bewegende Kraft bei veränderlicher Bewegung ebenso an einer Figur anstellen, wie dieß mit den Geschwindigkeiten im §. 16 geschehen ist. Bezeichnet nämlich wie dort die Linie **Oa'b'c'...f'** (Fig. **36**) die Gesetzmäßigkeit, welche zwischen Zeit und Geschwindigkeit stattfindet, und sind **cc'** und **dd'** die Geschwindigkeiten zu Anfang und Ende des Zeitelementes **cd = t**, so wird die durch **c'** gezogene Parallele **c'd''m** zur Zeitaxe **OB** von der Ordinate **dd'** die kleine Dimension **d'd''** abschneiden, welche die während des Zeitelements **cd = c'd''** stattgehabte und durch **v** bezeichnete Geschwindigkeitszunahme vorstellt. Die seit Anfang des Zeittheilchens **cd** als constant angenommene Kraft wird nämlich in gleichen Zeiten auch gleiche Geschwindigkeitsveränderungen **d'd''** bewirken und die gerade Linie **c'n** das Gesetz der erlangten Geschwindigkeiten ausdrücken. Stellt nun noch **c'm** als Abscisse die Zeitsecunde vor, so wird die Ordinate **mn** die am Ende derselben erlangte Geschwindigkeit **V** repräsentiren, so daß man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke **c'd'd''** und **c'mn** die Proportion

$$cd'' : d'd'' = c'm : mn \text{ oder } t : v = 1 : V$$

erhält, woraus wie oben $V = \frac{v}{t}$ folgt.

Die Linie **c'n** ist wegen der Kleinheit von **t** die Verlängerung des Curvenelementes **c'd'** und Tangente zur Curve selbst und man kann mithin, sobald man nur das Gesetz der Bewegung kennt, dnrch Zeichnung der Tangente für jeden Moment der Bewegung die Geschwindigkeit **V** und folglich auch den Werth $MV = \frac{P}{g} V$ der bewegenden Kraft **K** finden. Ließen sich dagegen aus einer Tabelle oder einer graphischen Darstellung die bewegenden Kräfte entnehmen, und wäre überdieß die Anfangsgeschwindigkeit **OO'**

gegeben, so würde man ebenso leicht aus diesen Daten die Geschwindigkeitscurve verzeichnen können. Man darf nur O'm' parallel zu OB ziehen, der Zeiteinheit gleich machen, den Werth V, aus $V = \frac{K}{M} = \frac{Kg}{P}$ berechnet, als Ordinate m'n' auftragen, so erhält man in O'n' die Richtung des ersten Curvenelements O'a' und in dem Theile derselben bis zur Ordinate aa', welche dem ersten Zeittheilchen entspricht, dieses Element selbst. Indem man dieß für die auf einander folgenden Zeittheilchen wiederholt, findet man nach und nach die sämmtlichen Curvenelemente nach Richtung und Größe und hat mithin die Curve selbst verzeichnet.

Um die Construction zu vereinfachen, kann man auf eine Linie (Fig. 37) pm = 1 Sec. und pq = t, in den Puncten q und m Perpendikel errichten und auf letzteres die verschiedenen Werthe von V als mn, mn', mn''.... auftragen. Zieht man nun pn, pn', pn''....., so sind qs, qs', qs''... die Geschwindigkeitsveränderungen v von einem Zeitelemente zum andern, denn es ist z. B. qs : qm = pq : pm oder qs : V = t : 1 und qs = Vt.

Es versteht sich übrigens von selbst, daß die erhaltene Curve das Bewegungsgesetz um so genauer darstellen wird, je größer die Anzahl der Theile ist, in welche man die ganze Zeit getheilt hat.

Endlich wird der durch die Coordinaten und die krumme Linie eingeschlossene Flächenraum OO'f'f zugleich den ganzen durchlaufenen Weg angeben, da nach §. 58 die Trapeze bb'c'c, cc'd'd.... die nach einander durchlaufenen Wegelemente repräsentiren.

74. Maß der Arbeit bewegender Kräfte und der Trägheit. — Nachdem wir in dem Vorhergehenden die Kraft K in irgend einem Augenblicke ihrer Thätigkeit messen gelernt haben, wird es uns auch möglich sein, die Arbeit dieser Kräfte während der unendlich kleinen Zeit t, wo wir ihren mittlern Werth kennen, zu erfahren.

Das Product aus der Kraft K in dem kleinen Weg, welchen der Körper oder der Angriffspunct der Kraft in der Zeit t zurückgelegt hat, wird nothwendig diesem Arbeitselemente gleich sein. Da aber der Weg während des kleinen Zeittheilchens $cd = t$ sich nach §. 58 durch das Trapez $cc'd'd$ (Fig. 35) messen läßt und $\frac{cd}{2}(cc' + dd')$, oder wenn wir $\frac{1}{2}(cc' + dd')$ mit v_1 bezeichnen, $v_1 t$ ist, so wird die gesuchte Arbeitsgröße $Kv_1 t = \frac{Mv}{t} \cdot v_1 t = Mvv_1$ sein.

Die Totalarbeit der Kraft, der Inbegriff aller der einzelnen Arbeitsgrößen läßt sich aus einer Construction leicht finden, wenn man bedenkt, daß M ein unveränderlicher Faktor ist und es nur noch darauf ankommt, das Product vv, zu finden. Tragen wir daher vom Anfangspuncte O Fig. 38 hintereinander veränderliche Geschwindigkeitszunahmen Oa, ab, bc . . . auf, so daß die Längen Oa, Ob, Oc . . . . die am Ende der aufeinander folgenden Zeitelemente erreichten Geschwindigkeiten vorstellen, machen wir ferner $aa' = Oa$, $bb' = Ob$ u. s. f., so daß die Puncte O,a,b . . . . in die Hypotenuse eines gleichschenklichen rechtwinkligen Dreiecks fallen, so wird in Bezug auf die Geschwindigkeitszunahme $d'd'' = v$ das Product derselben mit der mittlern Geschwindigkeit $v_1 = \frac{1}{2}(cc' + dd')$, also der Werth vv_1 durch den Inhalt des kleinen Trapezes $cc'd'd$ bestimmt sein. Die andern Trapeze entsprechen den Producten vv' für andere Zeitelemente und es kann folglich die Summe aller dieser Producte durch den Inhalt des Dreiecks Off' gemessen werden.

75. Relation zwischen der aufgewendeten Arbeit und der erlangten lebendigen Kraft. — Nehmen wir mit Beziehung auf den vorhergehenden § an, der Körper sei von der Ruhe aus in die Geschwindigkeit $dd' = v$, versetzt worden, so ist für diesen Fall die Summe aller Producte vv, bis dahin durch den Inhalt des Dreiecks Odd'

dargestellt und mithin $vv_1 = \frac{1}{2} dd' . Od = \frac{1}{2} dd' . dd' = \frac{1}{2} v_1^2$. Demzufolge wird die der Geschwindigeit v_1 entsprechende und auf die Trägheit des Körpers verwendete Arbeitsgröße durch $M . \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{Mv_1^2}{2}$, d. h. durch die Hälfte der seit Anfang der Bewegung dem Körper mitgetheilten lebendigen Kraft gemessen, und es wird dadurch die in §. 65 ausgesprochene Behauptung vollkommen gerechtfertigt, welche die Giltigkeit dieses Grundsatzes in Bezug auf die durch die Schwere hervorgebrachte, gleichförmig beschleunigte, Bewegung auch auf jede andere veränderliche Bewegung und jede andere Kraft, als die Schwere ausdehnte.

Denkt man sich ferner die Geschwindigkeit bis zur Größe $ff' = v_2$ angewachsen, so ist die ganze bis dahin aufgewendete Arbeit $\frac{Mv_2^2}{2}$ und folglich die auf die Geschwindigkeitszunahme von v_1 bis v_2 verwendete Arbeit $\frac{Mv_2^2}{2} - \frac{Mv_1^2}{2} = \frac{1}{2} (Mv_2^2 - Mv_1^2)$, wie auch aus dem Inhalte des Trapezes $dd'f'f$ hervorgeht. Für die Zeit, während welcher v_1 bis v_2 zunimmt, ist aber das Wachsthum der lebendigen Kraft $Mv_2^2 - Mv_1^2$ und es wird daher auch die Arbeitsgröße, durch welche eine bewegende Kraft die Bewegung eines Körpers beschleunigt, in irgend einem Zeitraume während der Bewegung durch die Hälfte der in dieser Zeit erlangten lebendigen Kraft gemessen.

Findet eine Abnahme der Geschwindigkeit von v_2 auf v_1 statt, wie es bei einer verzögernden Kraft, bei einer als Widerstand wirkenden bewegenden Kraft der Fall ist, so gelangt man durch ähnliche Schlüsse wiederum auf eine Arbeitsgröße $\frac{1}{2} (Mv_2^2 - Mv_1^2)$ und überzeugt sich, daß die durch den Widerstand entwickelte oder durch die zur Kraft gewordenen Trägheit absorbirte Arbeitsgröße ebenfalls der Hälfte der lebendigen Kraft entspricht, welche vernichtet werden mußte.

Die hier erlangten Resultate lassen sich daher in dem allgemeinen Satze zusammenfassen:

Bei jeder veränderlichen Bewegung eines Körpers ist dessen Gewinn oder Verlust an lebendiger Kraft innerhalb irgend eines Zeitraums stets doppelt so groß, als die Arbeitsgröße, welche in diesem Zeitraume durch die bewegende Kraft oder durch die ihr gleiche und entgegengesetzte Trägheit entwickelt wird.

76. Verwandlung mechanischer Arbeit in lebendige Kraft und umgekehrt, — Man wird jetzt begreifen, inwiefern die Trägheit der Materie dazu dienen kann, Arbeit in lebendige Kraft und diese wieder in Arbeit zu verwandeln, oder wie wir uns früher bei Gelegenheit der Verticalbewegung schwerer Körper (§. 67) ausdrückten, die Arbeit der Beweger anzuhäufen, in lebendige Kraft umzuwandeln und in der Folge vollständig wieder abzugeben. Sehr häufig stoßen wir auf dem Gebiete der Industrie auf Fälle, wo dergleichen Verwandlungen durch Maschinen, Werkzeuge u. s. f vor sich gehen.

Das Wasser im Reservoir einer Mühle z. B. vergegenwärtigt uns disponible Arbeit; sie verwandelt sich in lebendige Kraft, wenn die Schütze gezogen wird und das Wasser herabstürzt, und diese wird wieder zur Arbeit, wenn es auf das Mühlrad wirkt.

Die in der Kammer einer Windbüchse eingeschlossene comprimirte Luft vertritt die Stelle der auf ihre Zusammendrückung verwendeten mechanischen Arbeit; indem man durch den Abzug das Ventil öffnet, wird die Kugel fortgeschleudert und ein größerer oder kleinerer Theil jener Arbeit in lebendige Kraft verwandelt. Schlägt die Kugel gegen eine Feder (Fig. 39), so wird diese zusammengedrückt werden und der Trägheit der Kugel einen Widerstand leisten, welcher fortwährend zunimmt und die Kugel zur Ruhe bringt, sobald die Arbeit dieses Widerstandes einen der Hälfte der

lebendigen Kraft, welche die Kugel besaß, gleichen Werth erlangt hat.

Würde die Feder durch irgend ein Mittel in dem gespannten Zustande erhalten, den sie in diesem Augenblicke hat, so würde aus der lebendigen Kraft der Kugel disponible Arbeit in der elastischen Feder geworden sein; ließe man sie dagegen sofort auf die Kugel zurück wirken, so würde die derselben ertheilte Geschwindigkeit einer lebendigen Kraft entsprechen, doppelt so groß, als die beim Zurückgehen der Feder entwickelte Arbeitsgröße.

77. Wiedererstattung und Vernichtung der lebendigen Kraft beim Stoße der Körper. — Wäre es in Bezug auf das eben behandelte Beispiel möglich, daß die Kugel in dem nämlichen Augenblicke die Feder verließe, wo diese wieder in ihre natürliche Lage und zur Ruhe gekommen ist, und besäße die Feder vollkommene Elasticität, so würde die der Kugel wieder erstattete Geschwindigkeit oder lebendige Kraft genau mit derjenigen übereinstimmen, welche sie vorher in der entgegengesetzten Richtung hatte. Es würde also in diesem Beispiele die Arbeit in lebendige Kraft und diese wieder in Arbeit verwandelt worden sein, ohne allen Gewinn oder Verlust.

In der Wirklichkeit aber sind einestheils wenige Körper unter großen Pressungen vollkommen elastisch, noch bestätigt sich die Annahme, daß die Feder im Augenblicke, wo sie von der Kugel verlassen wird, ihre ursprüngliche Spannung wieder angenommen hätte; im Gegentheil weiß man, daß Kugel und Feder, indem sie sich trennen, in ihrem Berührungspuncte eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit haben, vermöge welcher, abgesehen von der Kugel, die Feder ihre Bewegung fortsetzt, bis ihre Spannung sie zurücktreibt. Sie geräth so in immer schwächere und schwächere Schwingungen, bei welchen die Attraktions- und Repulsionskräfte der Molecüle auf deren Trägheit ebenso wirken, wie die Feder bei ihrer Abspannung auf die Trägheit der Kugel. Wir sehen daraus, daß ein Theil der ursprünglichen lebendigen Kraft

der Kugel darauf verwendet wird, theils die Feder in Schwingungen zu versetzen, theils den Zusammenhang der Molecule zu verändern. Offenbar wird dieser Theil um so größer sein, je größer überhaupt die beim Abspannen der Feder entwickelte Arbeitsgröße war und man erkennt, daß beim Stoße der elastischen Körper, zumal wenn deren Geschwindigkeit und Masse sehr groß ist, ein sehr beträchtlicher Theil von lebendiger Kraft oder mechanischer Arbeit verloren gehen kann, und von welcher Wichtigkeit es ist, Stöße und Erschütterungen bei den Maschinen zu vermeiden.

78. Betrachtungen über die Unmöglichkeit, durch Federn und durch die Trägheit eine gegebene Arbeitsgröße zu vermehren. — Eben so wenig wie ein auf eine gewisse Höhe geworfener Körper durch das Herabfallen von derselben Höhe vermöge der Schwere eine größere Geschwindigkeit erlangen kann, als die, mit welcher er zu steigen anfing, eben so wenig ist es also nach dem Vorstehenden möglich, durch die Federkraft einem Körper eine größere als die ursprüngliche Geschwindigkeit zurück zu geben. Wenn aber, wie wir ebenfalls sahen, diese Geschwindigkeit nicht einmal vollständig wieder erstattet wird, so kann, da die verrichtete mechanische Arbeit stets die Hälfte der erlangten lebendigen Kraft ist, mit der Verwandlung der lebendigen Kraft in mechanische Arbeit und umgekehrt durch die Trägheit der Körper nur ein Verlust, nie ein Gewinn an Arbeitsgröße verknüpft sein.

Dies steht keineswegs im Widerspruche damit (§. 76), daß die Trägheit unverkürzt die auf sie verwendete Arbeitsgröße restituirt, denn der Theil der lebendigen Kraft, welchen wir oben als verloren annahmen, ist auf Bewegungen, auf Beseitigungen von Widerständen verwendet und blos dem als nützlich betrachteten Effecte entzogen worden. Der Verlust jener Kugel an lebendiger Kraft z. B. ist auf die oscillirenden Bewegungen der Feder verwendet worden, welche eine der Hälfte seines Werthes entsprechende Arbeitsgröße

in Anspruch genommen haben; es ist dieselbe also nur in Bezug auf die rückläufige Bewegung der Kugel ein Verlust.

79. Untersuchung der periodischen Bewegung und Verhalten der Trägheit bei derselben. — Vorzugsweise finden die Verwandlungen lebendiger Kraft in Arbeit in allen den Fällen statt, wo ein Körper durch eine bewegende Kraft in eine Bewegung versetzt wird, die vermöge seiner Verbindung mit anderen Körpern eine bald beschleunigte, bald verzögerte ist (15), hauptsächlich also bei oscillirenden Maschinentheilen, welche, zwischen zwei äußersten Stellungen hin und hergehend, beim Umkehren jedesmal aus der Bewegung in Ruhe und aus der Ruhe wieder in Bewegung übergehen müssen. Wir sehen dann die Geschwindigkeit zu Anfange jeder Periode wachsen, ein Beweis, daß ein Theil der mechanischen Arbeit in der Richtung der Bewegung zur Vermehrung der lebendigen Kraft um das Doppelte dieses Arbeitstheiles verwendet wird, während den übrigen Theil die Widerstände in Anspruch nehmen; wir sehen sie dagegen um das Ende jeder Periode abnehmen und schließen daraus, daß ein gewisser Theil der vorher erlangten lebendigen Kraft mit zur Vermehrung der Arbeit des Bewegers und zwar um die Hälfte dieser lebendigen Kraft beiträgt.

Wenn für je zwei Augenblicke der Bewegung der Körper gleiche Geschwindigkeiten besitzt, so ist auch die lebendige Kraft in diesen Augenblicken dieselbe, d. h. es wird in der Zwischenzeit durch die Trägheit weder etwas gewonnen, noch verloren, denn es ist so gut, als ob gar keine Arbeit zur Ueberwindung der Trägheit nöthig gewesen wäre. Ist dagegen die Geschwindigkeit in zwei andern Augenblicken nicht von gleicher Größe, so wird die Hälfte des Unterschiedes der lebendigen Kräfte in diesen Augenblicken die durch die Trägheit entweder in Anspruch genommene oder wiedererstattete Arbeitsgröße messen. Bei der mit Null Geschwindigkeit anfangenden Bewegung hat folglich die durch die

Trägheit absorbirte Arbeit in irgend einem Augenblicke die Hälfte der lebendigen Kraft in demselben zum Maße.

Man kann zu denselben Resultaten auch mit Hülfe der Geometrie gelangen. Stelle man sich nämlich unter den Coordinaten der Linie Of' (Fig. 38) die verschiedenen Werthe vor, welche die Geschwindigkeit, von O nach ff' wachsend und von ff' nach O' hin abnehmend, nach und nach annimmt, so entspricht die während des Zunehmens der Geschwindigkeit absorbirte Arbeit den Dreieckflächen Oaa', Obb' ..., Off'. Indem nun die Geschwindigkeit wieder abnimmt, durchläuft sie gewissermaßen nach einander die Trapeze ff'e'e, ee'd'd, dd'c'c .... und vermindert das der Hälfte der größten lebendigen Kraft zukommende Dreieck Off' allmählig um deren Flächenräume, so daß, wenn die Ordinate wieder im Puncte O angekommen, d. h. die Geschwindigkeit wieder Null geworden ist, auch die von der Trägheit in Beschlag genommene Arbeit gleichfalls Null sein wird.

Für irgend zwei Augenblicke, für welche bb' und ee' die Geschwindigkeiten sind, wird daher auch die durch die Trägheit gebundene oder frei gewordene mechanische Arbeit ihr Maß in dem Inhalte des Trapezes bb'e'e finden, welches sich aus jenen Geschwindigkeiten bb', ee' und ihrer Zu- oder Abnahme $be = ee' - bb'$ construiren läßt. Es ist dann, weil der Inhalt dieses Trapezes $\frac{ee' + bb'}{2}(ee' - bb') = \frac{1}{2}(\overline{ee'}^2 - \overline{bb'}^2)$ die mechanische Arbeit $\frac{1}{2}(\overline{ee'}^2 - \overline{bb'}^2)\,M = \frac{1}{2}(Mv_2^2 - Mv_1^2)$, wie oben

80. **Beispiele für periodische Bewegung.** — Ein Wagen, welcher bald schneller bald langsamer geht, bietet ein solches Beispiel; zuerst wird von den Pferden eine gewisse Arbeitsgröße verwendet, ihn in irgend eine Geschwindigkeit zu versetzen; wenn hierauf in Folge vermehrter Widerstände oder verminderter Anstrengung der Pferde die Geschwindigkeit abnimmt, so wird der Theil der Arbeit,

dessen es vorhin zur Ueberwindung der Trägheit bedurfte und welcher mit der Hälfte der Verminderung an lebendiger Kraft übereinstimmt, diese Widerstände besiegen helfen. Kommt zuletzt der Wagen wieder zur Ruhe, so wird die durch die Trägheit zurückerstattete Arbeit der vorher zu ihrer Ueberwindung erforderlich gewesenen vollkommen gleich sein, so daß in der That kein Verlust stattgefunden hat.

Wenn eine Last senkrecht emporgehoben wird, so wird sie zuerst aus der Ruhe in Bewegung und, sobald die beabsichtigte Höhe erreicht ist, wieder in Ruhe gebracht. Im Anfange also wird nicht allein die Schwere, sondern auch die Trägheit der Last überwunden werden müssen, während gegen das Ende der Bewegung, wenn die Geschwindigkeit wieder abnimmt, die von der Last erlangte lebendige Kraft einen Theil der Schwere aufhebt und zur Erhebung des Körpers beiträgt.

In der Bewegung der Pumpenkolben, der Sägen, Feilen, Hebel und vieler anderer Werkzeuge wird man leicht ähnliche Fälle wieder erkennen, bei welchen die Trägheit wieder erstattet, was sie vorher in Anspruch nahm. In diesen Beispeilen haben wir freilich vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit ganz allmählig aus einem ihrer Grenzwerthe in den andern übergehe, in welchem Falle wir den Verlust an lebendiger Kraft, der von der Rückwirkung der Körpertheilchen auf einander herrührt, ganz außer Acht lassen konnten. Allein ganz anders wird es sich verhalten, wenn die Geschwindigkeit zu Anfang und Ende jeder Periode sich plötzlich ändert; es wird dann Stoß zwischen den mehr oder weniger elastischen Körpern entstehen, welcher immer Veranlassung ist, daß ein beträchtlicher Theil an mechanischer Arbeit nicht blos dem Nutzeffecte entfremdet wird, sondern auch noch zerstörend auf den Zusammenhang der Körpertheilchen wirkt, oder die Körper in schwingende und zitternde Bewegung versetzt, wie man oft genug an fehlerhaft angeordneten Maschinentheilen beobachten kann.

81. Antheil der Trägheit an verschiedenen industriellen Vorgängen. — Wenn auch in den frühern Beispielen schon gezeigt wurde, welche Rolle bei industriellen Operationen die Trägheit spielt, so wollen wir ihnen doch noch einige hinzufügen, um zu zeigen, wie sich aus derselben eine Menge Erscheinungen im alltäglichen Leben erklären lassen.

Um das Eisen aus dem Kasten eines Hobels zu lösen, schlägt der Arbeiter gegen die Hinterseite des Kastens, und indem er dadurch plötzlich diesem eine Geschwindigkeit ertheilt, widerstehen Eisen und Keil durch ihre Trägheit mehr oder weniger der Bewegung und schieben sich aus dem Keilloche.

Durch heftige Stöße auf die Spunddaube eines Fasses setzt man diese in eine sehr schnelle Bewegung und indem der Spund, gleich als ob er am obern Ende festgehalten würde, vermöge seiner Trägheit dieser Bewegung widersteht, löst er sich leichter aus der Spundöffnung, als wenn man direkte und vielleicht gewaltsamere Mittel dazu angewendet hätte.

Man befestigt oft einen Hammer an dem Stiele dadurch, daß man gegen das Ende des Stiels in der Richtung seiner Länge Schläge führt; die Trägheit des Hammers widersteht der Bewegung, die man dem Stiele dadurch giebt und es ist ganz so, als ob der Hammer gegen einen festen Widerstand gestemmt würde. Manche stoßen zur Erreichung desselben Zweckes blos mit dem freien Ende des Stiels heftig nach unten gegen einen festen Widerstand und es ist hier wiederum die Trägheit der Materie, welche, indem sie dies Mal die Bewegung fortzusetzen strebt, während der Stiel zur Ruhe kommt, in Gemeinschaft mit der Schwere den Hammer fester auf den Stiel treibt. Einige Fälle, in welchen die Trägheit benutzt wird, Arbeit in lebendige Kraft und lebendige Kraft in Arbeit zu verwandeln, sind in folgenden Beispielen enthalten:

Der Kreisel erhält durch die Arbeit der Hand, indem diese eine auf seine Spindel aufgewundene Schnur mit

beschleunigter Bewegung abwickelt und ihn fortschleudert; soviel lebendige Kraft, daß er noch lange nachher sich dreht und herumläuft, und, indem er dabei Hindernisse besiegt, Arbeit verrichtet.

Bei der Rennspindel der Metallarbeiter wird durch das Niederdrücken des Querholzes ein schmaler lederner Riemen, der um die Spindel gewunden ist, abgewickelt. In dem Augenblicke, wo diese Abwickelung gänzlich erfolgt ist, hat die Masse des Bohrers, die deshalb durch eine schwere Scheibe vermehrt ist, soviel lebendige Kraft vermöge ihrer Trägheit angesammelt, daß die Spindel ihre drehende Bewegung fortsetzt und der Riemen sich verkehrt aufwickelt; das Querholz wird dadurch in die Höhe gezogen, um von Neuem niedergedrückt zu werden u. s. f.

Man bedient sich ferner zum Drehen kleiner und leichter Arbeitsgegenstände des kleinen Drehstuhls mit abwechselnder Drehung, weil die Trägheit hier wegen der geringen Masse der bewegten Theile wenig Einfluß übt und das Umkehren der Bewegung keine heftigen Erschütterungen herbeiführt, während man für große, zumal metallene Arbeitsstücke, dagegen Drehbänke mit continuirlicher Drehung anwenden muß. Es beziehen sich zwar diese letzten Beispiele auf Drehbewegung, während wir früher nur die lebendige Kraft solcher Körper in Betracht gezogen haben, deren Theile durchaus einerlei Geschwindigkeit besitzen; allein wir werden später sehen, daß die vorausgegangenen Sätze über lebendige Kraft und mechanische Arbeit sich auch auf jede andere Art der Bewegung anwenden lassen.

Zweite Abtheilung.

Gleichgewicht der Kräfte und Dynamik.

I.

Kräfte, deren Richtungslinien sich in einem Puncte schneiden.

1. Gleichgewicht eines Körpers. — Wenn ein Körper der Wirkung mehrerer Kräfte ausgesetzt ist, so sagt man, unter allen diesen Kräften finde Gleichgewicht statt, wenn eine derselben die Wirkung aufhebt oder vernichtet, welche die anderen ohne die Mitwirkung jener hervorgebracht haben würden. Der Körper ist selbst im Gleichgewichte, wenn die auf ihn wirkenden Kräfte ihn im Zustande der Ruhe lassen.

Wir nahmen einen Körper als ruhend an, wenn er in Bezug auf Gegenstände, wie Berge, Häuser ꝛc., die wir als fest und unverrückbar zu betrachten gewohnt sind, seine Lage nicht verändert. Da aber alle Körper auf unserer Erde an der ununterbrochenen Bewegung derselben Theil nehmen und absolute Ruhe für keinen stattfindet, so ist der Körper, den wir nach den gewöhnlichen Begriffen als ruhend betrachten und welcher deshalb nach dem Vorigen im Gleichgewichte ist, dennoch in Bewegung. Der Begriff des Gleichgewichts bezieht sich daher nicht ausschließlich auf Ruhe und schließt keineswegs die Bewegung aus.

Ein Körper kann unter der Wirkung sich aufhebender Kräfte in Bezug auf gewisse andere in Ruhe, also im Gleichgewichte sein, in Bezug auf noch andere aber in Bewegung, diese Bewegung ändert das Gleichtgewicht, welches in ersterer Beziehung stattfindet, nicht. Hieraus ergiebt sich, wie man statisches und mechanisches Gleichgewicht zu unterscheiden hat.

Man nennt diejenige Kraft, welche für sich allein dieselbe Wirkung wie mehrere andere zusammen hervorbringt, die Resultante oder Mittelkraft, die letztern Componenten oder Seitenkräfte.

2. Resultante in gleicher Richtung wirkender Kräfte. — Wirken mehrere Kräfte in einer und derselben geraden Linie und nach der nämlichen Seite hin, so ist ihre Wirkung der einer einzigen Kraft gleich, welche so groß wie jene zusammengenommen und ihre Mittelkraft ist. Wenn sie jedoch, zwar noch in derselben geraden Linie, aber nach entgegengesetzten Seiten wirken, so wird ihre Resultante eine Kraft sein, welche dem Ueberschusse der Summe der nach der einen Seite wirkenden Kräfte über die Summe der nach der andern Seite wirkenden gleich und nach der Seite gerichtet ist, welche der größern der beiden Kräftesummen entspricht. Wenn an einem Seile in der Richtung desselben nach beiden Seiten Kräfte ziehen, so werden doch alle Puncte, also auch die Enden des Seils gleiche Spannung haben, weil der Zug nach der einen Seite einen ihm genau gleichen Theil des Zuges nach der andern Seite vernichtet. Die übrig bleibende Zugkraft, der arithmetische Unterschied der nach der einen und nach der andern Seite gerichteten Kräfte, giebt die Größe und Richtung der Mittelkraft und zeigt zugleich, daß der größern Summe der Kräfte eine größere Wirkung entspricht, als der kleinern.

3. Parallelogramm der Wege und Geschwindigkeiten. — Wenn ein Körper oder ein materieller Punct sich, geradlinig auf **AB** (Fig. 40) fortlaufend, von **A** nach **B** bewegt, so kann die Lage eines jeden der

Puncte **A** und **B** durch seine Projectionen auf irgend zwei in derselben Ebene liegende gerade Linien oder Axen **OM, ON** vollständig bestimmt werden. Gehören daher die Coordinaten **AA′, AA″** zum Puncte **A** und **BB′, BB″** zum Puncte **B**, so werden dem erstern die Projectionen **A′** und **A″**, dem letztern die Projectionen **B′** und **B″** auf jenen gegebenen Axen entsprechen. Indem nun der Körper von **A** nach **B** fortrückt, werden gleichzeitig seine beiden Projectionen die Wege **A′B′** und **A″B″** auf den geraden Linien **OM** und **ON** zurücklegen, so daß der wirkliche Weg **AB** auch durch die Linien **A′B′** und **A″B″**, die wir die auf die Richtungen **OM** und **ON** bezogenen Wege nennen wollen, ersetzt werden kann. Verlängern wir nun die Coordinaten der Endpuncte **A** und **B**, bis sie das Parallelogramm **AEBF** bilden, so ist **AE = A′B′** und **AF = A″B″** und wir können den Satz aufstellen:

daß jeder geradlinige Weg in zwei auf zwei beliebige Richtungen bezogene Wege zerlegt werden kann, und daß diese letztern die jenen Richtungen parallelen Seiten eines Parallelogramms sind, dessen Diagonale der wirklich durchlaufene Weg ist.

Hat man umgekehrt die auf irgend zwei Richtungen bezogenen Wege, so kann man daraus den wirklichen Weg finden, wenn man die Diagonale des aus diesen Wegen construirten Parallelogramms aufsucht.

Das Maß der Geschwindigkeit eines bewegten Körpers ist, wie wir wissen, der in einem Zeitelemente durchlaufene Weg, und nur bei der gleichförmigen Bewegung kann die Zeit, auf welche sich die Geschwindigkeit bezieht, beliebig groß genommen werden. Da nun der Weg **AB** in der nämlichen Zeit durchlaufen wird, wie die Wege **A′B′** und **A″B″**, so kann ersterer als die wirkliche oder Mittelgeschwindigkeit, die beiden andern dagegen können als die auf die Axen bezogenen oder Seitengeschwindigkeiten betrachtet werden. Die wirkliche Geschwindigkeit eines

Körpers ist daher die Diagonale eines über den beiden Seitengeschwindigkeiten construirten Parallelogramms.

4. Krummlinige Bewegung und veränderliche Bewegung. — Hat der Körper eine krummlinige Bewegung, so kann die geradlinige Diagonale **AB** nicht mehr den durchlaufenen Weg vorstellen, und ist die Bewegung veränderlich, so kann diese Diagonale nicht mehr die Intensität der Geschwindigkeit angeben, sofern es sich um eine endliche Zwischenzeit handelt. Man muß alsdann für eine Aufeinanderfolge von gleichen und unendlich kleinen Zeiten die gleichzeitig durchlaufenen und auf zwei Axen bezogenen Wegelemente bestimmen. Indem man zu je zwei der zu einem Zeitelemente gehörigen Wegelemente Parallelogramme construirt, erhält man in den Diagonalen derselben die wirklich durchlaufenen kleinen Wege. Da die zwei Puncte, in welchen sich der Körper zu Ende zweier aufeinander folgender Zeitelemente befindet, unendlich nahe beisammen liegen, so stellt die Diagonale **AB** (Fig. 41) selbst ein Curvenelement vor, so daß es als Tangente der Curve betrachtet werden kann. Bei der Construction der Parallelogramme kann man statt der so kleinen Seitengeschwindigkeiten die Vielfachen derselben nehmen, die Richtung der Diagonale wird dadurch natürlich nicht geändert; nur erhält man begreiflicherweise auch die Vielfachen der Mittelgeschwindigkeit und darf deshalb in Bezug auf die Größe derselben die Reduction nicht unterlassen.

Hierauf gründet sich Roberval's Methode, zu einer Curve, deren Bildungsgesetz bekannt ist, eine Tangente zu ziehen. Kennt man nämlich das Gesetz der Bewegung eines Punctes in Bezug auf zwei beliebige Richtungen, so kann nach dem Vorhergehenden durch die Construction eines Parallelogramms die Tangente zu der von dem Puncte verzeichneten Curve jederzeit bestimmt werden. Wird z. B. ein mit seinen beiden Enden in zwei Puncten **F** und **F'**, den sogenannten Brennpuncten, befestigter Faden **FAF'** (Fig. 42)

von der Länge der großen Axe EG durch einen Stift A beständig gespannt erhalten, während derselbe durch alle Lagen, welche ihm diese Spannung anzunehmen gestattet, fortgeführt wird, so durchläuft er eine gesetzmäßige krumme Linie, die Ellipse. Da nun bei der Bewegung des beschreibenden Punctes die Fadenlänge FA + AF' unveränderlich dieselbe bleibt und, sofern die Bewegung von A nach G hin geschieht, der Theil FA sich genau um so viel verlängert, als der andere Theil AF' sich verkürzt: so wird man dem Puncte A zwei gleichzeitige Bewegungen, einen Weg auf dem Radius-Vector FA in der Richtung von F gegen A und einen gleichgroßen Weg auf dem Radius-Vector AF' von A gegen F' zuschreiben müssen. Trägt man daher auf die Verlängerung von FA eine Länge AB und auf AF, die gleiche Länge AB' = AB, und construirt hierzu das Parallelogramm, so ist die Diagonale AC desselben die Tangente zum Puncte A der Ellipse. Da für den hier gewählten Fall das Parallelogramm ein gleichseitiges ist, in welchem die Winkel BAC und CAB' einander gleich sind, so erkennt man daraus zugleich, daß die Tangente zur Ellipse die Eigenschaft besitzt, gleiche Winkel mit den zugehörigen Leitstrahlen zu bilden.

5. Unabhängigkeit der einem Körper gleichzeitig ertheilten Geschwindigkeiten. — Stellen wir uns vor, auf dem Verdecke eines Bootes, welches einen Fluß befährt, bewege sich ein Körper von einer Seite des Bootes zur gegenüberliegenden so, daß er, von A (Fig. 43) ausgehend, in demselben Augenblicke und in dem nämlichen Zeitraume nach B gekommen sei, in welchem der Punct A des Bootes nach A' und der Punct B nach B' gelangt ist. Der bewegte Körper, obgleich er für sich nur den Weg AB über das Verdeck durchlaufen hat, hat in Bezug auf die Ufer des Flusses den viel größeren Weg AB' zurückgelegt, denn er ist zu gleicher Zeit mit seiner eigenen Geschwindigkeit und mit der des Bootes bewegt worden. Wäre statt dessen der Körper erst von A nach B und hierauf das

Boot von A nach A′ oder umgekehrt das Boot erst von A nach A′ und der Körper dann von B nach B′ gegangen, so würde der Erfolg der nämliche gewesen und der Körper ebenfalls von A nach B′ gekommen sein. Verfolgen wir unser Beispiel weiter, so müssen wir, weil das Boot die Rotationsbewegung der Erde um ihre Axe theilt, dem auf dem Verdecke des Bootes bewegten Körper drei gleichzeitige Geschwindigkeiten und wegen der Bewegung der Erde um die Sonne vier beimessen. Die wahrscheinliche Bewegung unsers ganzen Planetensystems gegen das Sternbild des Herkules hin läßt uns sogar noch eine dem Körper inwohnende fünfte Geschwindigkeit vermuthen. Der Erfolg aller dieser dem Körper ertheilten Geschwindigkeiten, der wirklich zurückgelegte Weg desselben ist genau der nämliche, als ob ihm diese Geschwindigkeiten nicht gleichzeitig, sondern nach einander gegeben worden wären. Bezeichnen daher **AB, BC, CD, DE** (Fig. 44) sowohl die Richtungen, als die Intensitäten der Geschwindigkeiten, mit welchen ein Körper zu gleicher Zeit bewegt wird, so wird **AE** seine Entfernung vom Anfangspuncte **A** der Bewegung am Ende des Zeitraums, auf welchen sich die gleichzeitigen Geschwindigkeiten beziehen, mithin seine wirkliche Geschwindigkeit messen.

Wir sehen daraus, daß die Resultante aus mehreren zu gleicher Zeit ertheilten Geschwindigkeiten die Seite eines Polygons ist, dessen andere Seiten gleich und parallel mit den gegebenen Geschwindigkeiten sind.

6. Jede der gleichzeitig angreifenden Kräfte wirkt unabhängig von den übrigen. — Mag ein Körper in Ruhe oder schon in Bewegung begriffen gewesen sein, die Wirkung einer Kraft auf denselben ist stets die nämliche. Auf einem ruhig fortsegelnden Schiffe gehen die Bewegungen, die Wirkungen von Kräften ebenso vor sich, wie auf einem in Ruhe befindlichen, und die Bewegung des Schiffes selbst durch irgend eine Kraft erfolgt ungeachtet der Bewegung der ganzen Erde ebenso, als ob die letztere

nicht stattfände. Ueberlassen wir einen Körper seinem eigenen Gewichte, so wird ihm die Schwere in jedem Augenblicke dieselben Geschwindigkeitsgrade ertheilen, gleichviel ob er eben erst die Ruhe verläßt oder ob er schon durch eine andere Kraft irgend eine Bewegung erhalten hat. Wäre dieser Körper z. B. eine Bombe, welche eine Parabel in der Luft beschreibt, so würde die Geschwindigkeit, welche sie in jedem Augenblicke besitzt, immer die Resultante **MR** (Fig. 45) zur Geschwindigkeit **MQ**, welche sie im Augenblicke zuvor erreicht hat, und zu dem sehr kleinen Geschwindigkeitsgrade **MP** sein, welchen die Schwere in der ebenfalls sehr kleinen Zwischenzeit der Bombe ertheilt. Zwei Kräfte, welche auf einen Körper wirken, werden ihm daher in jedem Augenblicke und zu gleicher Zeit diejenigen Geschwindigkeitsgrade ertheilen, welche jeder einzelnen dieser Kräfte zugehören und welche, einem allgemeinen Naturgesetze (§. 70. I. Abth.) zufolge, den Intensitäten der Kräfte proportional sind.

7. Parallelogramm der Kräfte. — Sind Größe und Richtung zweier Kräfte **P** und **Q** (Fig. 46), welche auf einen materiellen Punct **A** wirken, durch die geraden Linien **AB** und **AC** ausgedrückt, so werden sie, jede in ihrer Richtung, ihm nach dem Vorigen zu gleicher Zeit die kleinen Geschwindigkeitsgrade **Am, An** ertheilen, welche jeder derselben einzeln entsprechen, und die Mittelgeschwindigkeit wird durch die Diagonale des Parallelogramms **Amrn** bestimmt sein. Stellen wir uns nun in der entgegengesetzten Richtung von dieser Diagonale eine Kraft **X** vor, welche die resultirende Geschwindigkeit **Ar** aufhebt, so wird gar keine Bewegung mehr erfolgen, d. h. die Kraft **X** wird auch die Kräfte **P** und **Q** aufheben und Gleichgewicht herstellen. Macht man nun **AD = X**, so ist einleuchtend, daß **AD** dieselbe Wirkung hervorbringen würde, wie **P** und **Q**, und folglich die Mittelkraft derselben ist, und da ferner die Kräfte **P, Q** und ihre Mittelkraft **AD = X** proportional sind den Geschwindigkeitsgraden **Am, An, Ar**, welche sie gleichzeitig ertheilen, so werden

P, Q und AD ebenso die Seiten und die Diagonale eines Parallelogramms bilden, wie Am, An, Ar das Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

Die Resultante zweier Kräfte wird sowohl nach Größe als nach Richtung durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt, welches aus den durch Linien ausgedrückten Intensitäten dieser Kräfte construirt werden kann.

Die Erfahrung bestätigt diesen unter der Benennung Parallelogramm der Kräfte bekannten Satz vollkommen und man kann sich von seiner Richtigkeit leicht durch ein Experiment überzeugen. Wenn man nämlich an einem Seile ACB (Fig. 47), welches an zwei Enden befestigt ist, ein Gewicht R aufhängt, so ist es möglich, auf irgend eine Weise, z. B. durch Federn die Spannungen der beiden Seiltrümmer AC und BC zu messen und durch Gewichte auszudrücken, welche die Last R hervorbringt. Trägt man nun oberhalb des Knotens C und in der durch diesen Punct gehenden Vertikalen eine der Zahl der Gewichtseinheiten von R entsprechende Linie auf und construirt das Parallelogramm CaDb, so werden auch die Seiten Ca und Cb desselben den durch die Federn gemessenen Spannungen entsprechen.

8. Zerlegung einer Kraft in zwei andere. — Da zwei Kräfte, welche an einem und demselben Puncte angreifen, durch eine einzige ersetzt werden können, so läßt sich auch umgekehrt jede Kraft nach zwei gegebenen Richtungen in zwei andere Kräfte zerlegen.

Wollte man z. B. die Kraft Ar (Fig. 48), welche im Puncte A wirkt, in zwei andere nach AC und AB gerichtete Kräfte zerlegen, so dürfte man nur das Parallelogramm Amrn construiren, um in Ar die eine und in der Seite Am die andere Seitenkraft zu erhalten. Ist der Winkel, welchen die Componenten mit einander einschließen, ein rechter, und sind die Intensitäten derselben durch P und

Q und die ihrer Mittelkraft durch R bezeichnet: so erhält man, da rm = An ist, aus dem rechtwinkeligen Dreieck Arn

$$\overline{Ar}^2 = \overline{Am}^2 + \overline{An}^2 \text{ oder}$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 \text{ und folglich die Mittelkraft selbst}$$

$$R^2 = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Um die Wurzelextraction zu vermeiden, kann man auch die Formel $R = 0{,}96\,P + 0{,}4\,Q$ anwenden, welche hinreichende Genauigkeit gewährt, wenn unter P die größere der beiden Seitenkräfte verstanden wird *).

---

*) Die Näherungsformel $R = 0{,}96\,P + 0{,}40\,Q$ für $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ findet man im polytechnischen Centralbl. No. 67. Jahrg. 1840 von Weisbach auf folgende Weise gerechtfertigt.

Sind m und n zu bestimmende Coefficienten, und will man $R = \sqrt{P^2 + Q^2} = mP + nQ$ setzen, so erhält man einen um $\sqrt{P^2 + Q^2} - (mP + nQ)$ von R abweichenden Näherungswerth, und der verhältnißmäßige Fehler beträgt

$$f = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2} - (mP + nQ)}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = 1 - \frac{mP + nQ}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

für die beiden Grenzwerthe von Q, nämlich für $Q = o$ und $Q = P$ wird der Fehler einmal $f_1 = 1 - m$, das andremal $f_2 = 1 - \frac{m + n}{\sqrt{2}}$. Setzt man ferner $Q = \frac{n}{m_1} P$, so wird der Fehler $f_3 = 1 - \sqrt{m^2 + n^2}$ und nimmt man dann Q größer oder kleiner als $\frac{n}{m} P$, etwa $\frac{n}{m} P \pm \Delta$, so überzeugt man sich leicht, daß der Fehler in diesem letztern Falle kleiner wird, als $1 - \sqrt{m^2 + n^2}$, und daß also für $Q = \frac{n}{m} . Q$ der größte Fehler stattfindet.

9. Arbeitsgröße einer Kraft gegen einen Widerstand, welcher ihr nicht unmittelbar entgegengesetzt ist. — Nachdem wir bisher immer vorausgesetzt haben, daß der Widerstand der zu seiner Ueberwindung bestimmten Kraft unmittelbar entgegengesetzt sei, kommen wir jetzt zur Betrachtung des Falles, wo der Widerstand in einer ganz andern, als der Kraftrichtung stattfindet, und wo der Angriffspunct der Kraft sich nur in der Richtung

---

Damit nun soviel als möglich die Fehler gleichförmig vertheilt werden, darf man nur annehmen, daß für die drei Fälle, wo $Q = o$, $Q = P$, $Q = \frac{n}{m} P$ ist, die Näherungsformel ebensoviel zu groß wie zu klein sei. Es wird daher, wenn f_1 und f_2 positiv genommen werden, f_3 negativ, d. i. $f_3 = -(1 - \sqrt{m^2 + n^2})$, $= \sqrt{m^2 + n^2} - 1$ und $f_1 = f_2$ sowie $f_1 = f_3$ gesetzt werden müssen. Dies giebt

$$1 - m = 1 - \frac{m + n}{\sqrt{2}} \text{ und}$$

$$1 - m = \sqrt{m^2 + n^2} - 1.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $n = m\left(\sqrt{2} - 1\right)$ und setzt man diesen Werth in die zweite ein, so giebt diese $2 - m = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. Hieraus findet man zunächst

$$m = \frac{2}{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} = 0{,}96 \text{ und wenn man diesen}$$

Werth in $n = m\left(\sqrt{2} - 1\right)$ substituirt: $n = 0{,}414 \,.\, 0{,}96$ $= 0{,}398$ oder nahezu 0,40. Setzt man auf diese Weise $\sqrt{P^2 + Q^2} = 0{,}96\,P + 0{,}40\,Q$, so beträgt der größte Fehler, den man begehen kann, $f_1 = f_2 = f_3 = \pm(1 - m = \pm$ $(1 - 0{,}96) = \pm\frac{1}{25}$ vom wahren Werthe für R.

des Widerstandes bewegen kann. Nehmen wir z. B. an, die Kraft **AR = R** (Fig. 49) wirke auf den Körper **A**, welcher sich blos in der Richtung **AB** bewegen kann, und zerlegen wir sie in zwei Seitenkräfte, von welchen **AP = P** rechtwinkelig zu **AB** gerichtet ist und **AQ = Q** in die Richtung von **AB** selbst fällt, so ist die Wirkung der letztern dem zu überwindenden Widerstande gerade entgegengesetzt gerichtet, während die Kraft **P**, da der Körper nicht anders als in der Richtung **AB** weichen kann, nur auf denselben drückt, ohne ihn in Bewegung zu setzen und folglich ohne mechanische Arbeit zu verrichten. Ist nun **Aa** das Wegelement, welches der Körper **A** in der Richtung **AB** der Seitenkraft **Q** oder des Widerstandes zurückgelegt hat, so wird das Element an Arbeitsgröße zur Ueberwindung dieses Widerstandes durch das Product **Q . Aa** gemessen, und dieses wird auch die von der Kraft **R** wirklich geleistete Arbeit sein. Der eigentliche Weg **Aa** des Angriffspunctes der Kraft oder des Widerstandes kann auf unendlich mannichfache Weise in einen auf die Kraftrichtung **AR** und in einen zweiten auf eine beliebige andere Richtung bezogenen Weg zerlegt werden, allemal aber wird sich dieser letztere wieder in Bezug auf **AR** so zerlegen lassen, daß der bewegte Körper auch wieder in der Richtung der Linie **AQ** fortrückt, wenn er nicht rechtwinkelig gegen diese Linie gerichtet ist. Fällt man daher von **a** auf **AR** den Perpendikel **ar**, so ist **Ar** der von dem Angriffspuncte der Kraft **R** in Bezug auf deren eigene Richtung beschriebene Weg. Die rechtwinkeligen Dreiecke **AQR** und **Ara** sind aber, da sie den Winkel bei **A** gemeinschaftlich haben, ähnlich und geben die Proportion

Aa : Ar = AR : AQ oder **Aa : Ar = R : Q**,

woraus

Ar . R = Aa . Q folgt.

Wir sehen daraus, daß, wenn eine Kraft dem Widerstande nicht unmittelbar entgegengesetzt ist, der Aufwand an mechanischer Arbeit dem Producte aus dieser Kraft in den auf die Kraft-

richtung bezogenen Weg ihres Angriffspunctes gleich ist.

10. Arbeitsgröße zur Bewegung eines schweren Körpers in einer Curve. — Wenn ein Körper vom Gewichte **P** genöthigt ist, sich in einer Curve **ABC** (Fig. **50**) zu bewegen, so ist die kleine Arbeitsgröße, welche die Schwere aufwendet, um ihn das Wegelement **BC** durchlaufen zu lassen, nach dem Vorhergehenden dem Producte **P** in den auf die Vertikale bezogenen Weg **b'c'** gleich. Sucht man auf diese Weise die Arbeitselemente für die andern Curventheile auf, so ist, wie man leicht einsieht, ihre Summe oder die ganze durch die Schwerkraft aufgewendete mechanische Arbeit, durch das Gewicht **P** multiplicirt mit der Summe **AD = H** aller der auf die lothrechte Linie bezogenen Wege, d. h. durch das Product **P . H** ausgedrückt. Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, ist dies auch die Arbeitsgröße derjenigen Kraft, welche, in der Bewegungsrichtung selbst, also in der Curve wirkend, dieselbe Bewegung hervorgebracht haben würde. Da nun nach §. 66 der I. Abtheilung das Doppelte dieser Arbeitsgröße stets gleich der lebendigen Kraft des Körpers, also, wenn **V** die Endgeschwindigkeit des Körpers in der Curvenrichtung des tiefsten Punctes bezeichnet, dem Producte $\frac{PV^2}{g}$ gleich ist, so wird

$$2 . P . H = \frac{PV^2}{g} \text{ und}$$

$$H = \frac{V^2}{2g} \text{ sein.}$$

Es erlangt also der Körper durch die Bewegung auf der Curve von einer bestimmten Höhe herab dieselbe Endgeschwindigkeit, als wenn er von der nämlichen Höhe vertikal herabgefallen wäre. Auch wird die Arbeitsgröße, welche

ein Beweger zu leisten hat, um einen schweren Körper eine Ebene oder irgend eine Fläche entlang emporzuheben, jederzeit durch das Product aus dem Gewichte des Körpers in den Vertikalabstand des höchsten und tiefsten Punctes seines Weges gemessen werden.

11. Die Arbeitsgröße der Mittelkraft zweier gleichzeitig wirkender Kräfte ist der Summe oder Differenz der Arbeitsgrößen beider Seitenkräfte gleich, je nachdem sie in demselben oder im entgegengesetzten Sinne wirken. — Wir sahen im §. 9. der II. Abtheilung, daß das Element der Arbeitsgröße einer Kraft, deren Angriffspunct sich in einer von der der Kraft verschiedenen Richtung bewegt, sowohl durch das Product dieser Kraft in den auf ihre Richtung bezogenen Weg, als auch durch das Product der in die Bewegungsrichtung fallenden Seitenkraft in den vom Angriffspuncte wirklich durchlaufenen Weg ausgedrückt wird. Wenn daher **P** und **Q** (Fig. **51**) zwei im Puncte **A** angreifende Kräfte, **R** ihre Mittelkraft und **Aa** der vom Angriffspuncte durchlaufene kleine Weg ist, und wenn wir die Perpendikel **PP′**, **QQ′**, **RR′** aus den Puncten **P**, **Q**, **R** auf die Bewegungsrichtung fällen, so daß **AP′**, **AQ′**, **AR′** die Projectionen der Kräfte **P**, **Q** und **R** sind, so wird

Aa . AP′ das Arbeitselement der Kraft **P**,
Aa . AQ′ das der Kraft **Q** und
Aa . AR′ das der Kraft **R** sein. Nun ist nach der Figur **AR′ = AP′ — R′P′**, und weil in den Dreiecken **Rr′P** und **QQ′A** die Seiten der Reihe nach einander parallel, d. h. die gleichliegenden Winkel gleich und die Seiten **PR** und **AQ** als gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms ebenfalls gleich sind, so ist auch

R′P′ = rP′ = AQ′ und folglich
AR′ = AP′ — AQ′.

Diese Gleichung giebt, mit **Aa** multiplicirt,

AR′ . Aa = AP′ . Aa — AQ′ . Aa.

Weil hier die Seitenkraft AP′ mit der Bewegungsrichtung in gleichem, die Seitenkraft AQ′ aber im entgegengesetzten Sinne wirkt, so muß natürlich für diesen Fall auch die effective Arbeitsgröße dieser beiden Kräfte der Differenz der Arbeitsgrößen gleich sein. Sind dagegen die Componenten der beiden Kräfte P und Q wie in Fig. 52 mit der Bewegung gleich gerichtet, so würde man ganz durch die nämlichen Betrachtungen

$$AR' . Aa = AP' . Aa + AQ' . Aa,$$ d. h.

die mechanische Arbeit der Mittelkraft der Summe der Arbeitsgrößen der beiden Seitenkräfte gleich finden.

12. Moment der Mittelkraft zweier Seitenkräfte. — Die Art und Weise, wie der kleine Weg Aa beschrieben wird, kann verschieden sein. Nehmen wir z. B. an, er sei der Weg, welchen derjenige Punct eines um O (Fig. 53) drehbaren Göpelschwengels macht, an welchem die Kräfte wirken, so ist das Wegelement Aa ein kleiner Kreisbogen, den wir als das Element einer Kreisperipherie wie eine zum Halbmesser AO des Kreises rechtwinkelige kleine gerade Linie betrachten dürfen. Die von dem Endpuncte a dieses Weges auf die Kraftrichtungen gefällten Perpendikel bestimmen die auf diese Linien bezogenen kleinen Wege Ab, Ad und Ac der Kräfte P, Q und ihrer Mittelkraft R, so daß sich nach §. 9 der II. Abtheilung die Arbeitselemente dieser Kräfte durch

$$P . Ab,\ Q . Ad \text{ und } R . Ac$$

ausdrücken lassen. Fällt man nun noch aus dem Drehpuncte O Perpendikel Op, Oq und Or auf die nöthigenfalls verlängerten Richtungslinien der Kräfte, so erhält man, da die beiden Dreiecke OAp und Aab wegen der Rechtwinkeligkeit bei p und b und weil ab senkrecht zu Ap und Aa senkrecht zu AO, ähnlich sind, in Bezug auf die Kraft P

$$Ab : Aa = Op : AO \text{ und } Ab = Op . \frac{Aa}{AO}.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken AOq und aAd, sowie AOr und aAc erhält man auf demselben Wege in Bezug auf Q

$$Ad = Oq \cdot \frac{Aa}{AO}$$ und in Bezug auf R

$$Ac = Or \cdot \frac{Aa}{AO}.$$

Es lassen sich daher die Arbeitsgrößen der Kräfte P, Q und R durch die Producte

$$P \cdot Op \cdot \frac{Aa}{AO}, \quad Q \cdot Oq \cdot \frac{Aa}{AO}, \quad R \cdot Or \cdot \frac{Aa}{AO}$$

ausdrücken.

Nun haben wir uns aber im vorigen Paragraphen überzeugt, daß die Arbeitsgröße der Mittelkraft der Summe oder Differenz der Arbeitsgrößen der Seitenkräfte gleich ist; es muß folglich

$$R \cdot Or \cdot \frac{Aa}{AO} = P \cdot Op \cdot \frac{Aa}{AO} \pm Q \cdot Oq \cdot \frac{Aa}{AO},$$

und wenn man die Perpendikel Op, Oq, Or mit p, q und r bezeichnet und den gemeinschaftlichen Factor $\frac{Aa}{AO}$ beseitigt,

$$Rr = Pp \pm Qq$$

sein.

Die aus dem Drehpuncte auf die Kraftrichtungen gefällten Perpendikel Op, Oq, Or nennt man die Hebelsarme und die Producte dieser Hebelsarme in die zugehörigen Kräfte die (statischen) Momente der Kräfte P, Q und R. Man kann daher sagen, daß das Moment der Resultante zweier Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspuncte der Summe oder Differenz der Momente ihrer Componenten gleich ist, je nachdem diese in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne wirken.

13. Der Fall, wo zwei Kräfte verschiedene Angriffspuncte haben, läßt sich auf den der Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspuncte zurückführen. — Wirkt auf einen Körper (Fig. 54) die Kraft **P** im Puncte **B** und ist **A** irgend ein in der Richtung der Kraft **P** angenommener und mit **B** unveränderlich verbundener Punct, so können wir, ohne die Wirkung der Kraft **P** auf den Körper zu verändern, im Puncte **A** zwei Kräfte $\mathbf{P'} = \mathbf{P''}$ von gleichen Intensitäten und in gleicher Richtungslinie, mit **P** aber nach entgegengesetzten Seiten wirkend, anbringen. Die Wirkung der Kraft **P** wird offenbar auch die nämliche bleiben, wenn wir $\mathbf{P''}$ statt durch $\mathbf{P'}$, durch **P** aufheben lassen, so daß die mit **P** gleiche und gleichgerichtete Kraft $\mathbf{P'}$ eigentlich diese Wirkung hervorbringt. Man wird demnach den Angriffspunct der Kraft **P** ebenso gut nach dem Puncte **A** und nach jedem andern verlegen können, welcher in der Richtungslinie von **P** liegt; die Wirkung der Kraft auf den Körper wird dadurch auf keine Weise verändert. An welcher Stelle eines Fadens auch ein und dasselbe Gewicht aufgehängt sein mag, die Spannung desselben oder der Druck gegen seinen Befestigungspunct wird immer der nämliche sein.

Wirken nun zwei Kräfte **P** und **Q** (Fig. 55) auf einen Körper **MN** in den Puncten **B** und **C**, so darf man sowohl den Angriffspunct **B** der Kraft **P** in jeden Punct ihrer Richtungslinie **Pp**, als auch den Angriffspunct **C** der Kraft **Q** in jeden beliebigen Punct ihrer Richtung **Qq** verlegen, und es wird deshalb auch erlaubt sein, beide Kräfte als in dem ihren Directionen gemeinschaftlichen Puncte **A** angreifend zu denken. Man erhält alsdann in der Diagonale **AR** des Parallelogramms **APQR** die Mittelkraft und kann nach dem Vorigen den Angriffspunct **A** derselben wieder nach einem andern Puncte **D** des Körpers verlegen. Da wir nunmehr ganz den nämlichen Fall haben, wie in den beiden vorausgehenden Paragraphen, so würden wir, wenn wir nur die Bewegung des, beiden Kraftrichtungen gemein-

schaftlichen, Punctes A in Betrachtung ziehen und die dort angestellten Betrachtungen hier wiederholen wollten, uns überzeugen, daß auch für die beiden in verschiedenen Puncten angreifenden Kräfte die mechanische Arbeit der Mittelkraft der Totalarbeit der Seitenkräfte und das Moment der Mittelkraft in Beziehung auf einen Drehpunct O den vereinigten Momenten der beiden Seitenkräfte gleich ist.

14. Erweiterung des Lehrsatzes von den Momenten. — Man kann nun fragen, ob die zu Ende des vorigen Paragraphen in Ansehung der Bewegung des Durchschnittspunctes A der beiden in verschiedenen Puncten angreifenden Seitenkräfte aufgestellte Beziehung zwischen den Momenten der Seiten- und Mittelkräfte auch in Bezug auf die Bewegung der wirklichen Angriffspuncte B, C, D der Kräfte P, Q, R Geltung behält. Erinnert man sich, daß das einer Kraft entsprechende Moment lediglich von der Intensität der Kraft und von dem aus dem Drehpuncte auf ihre Richtungslinie gefällten Perpendikel abhängt, wie man auch den Drehpunct wählen mag, so sieht man leicht ein, daß das Moment irgend einer der drei Kräfte das nämliche sein wird, wenn die Kraft in dem einen oder wenn sie in dem andern Puncte ihrer eigenen Richtung angreift, weil sich durch eine solche Verlegung des Angriffspunctes weder die Intensität der Kraft, noch der Perpendikel zur Kraftrichtung ändert. Es bleibt demnach der Satz von den Momenten der Seiten- und Mittelkräfte auch dann noch wahr, wenn die Componenten P und Q verschiedene Angriffspuncte haben.

15. Erweiterung des Lehrsatzes von den Arbeitsgrößen. — Auch in Bezug auf die oben angeführte Relation zwischen den Arbeitsgrößen der Mittelkraft und ihrer Seitenkräfte läßt sich die Frage aufwerfen, ob diese Relation noch stattfindet, wenn die Arbeitsgrößen der Kräfte nicht durch die Bewegung des ihnen gemeinschaftlichen Angriffspunctes A, sondern durch die Bewegungen

ihrer wirklichen Angriffspuncte gemessen werden. Offenbar wird dies der Fall sein, wenn man darthun kann, daß die Arbeitsgröße einer Kraft die nämliche ist, welcher Punct ihrer eigenen Richtungslinie zum Angriffspuncte gewählt werden möge. Um hierüber Gewißheit zu erhalten, müssen wir drei Fälle, je nachdem nämlich der Körper eine rotirende, eine progressive oder irgend eine andere Bewegung hat, untersuchen.

1ter Fall. Denkt man sich den Körper und mithin auch die Richtungslinie der Kraft P (Fig. 56), welche auf den Körper wirkt, in drehender Bewegung um den Punct **O**, so werden irgend zwei Puncte **A** und **B** der ursprünglichen Kraftrichtung **AP** gleiche Winkel um den Punct **O** beschreiben, so daß die kleinen Bogen **Aa** und **Bb** sich wie die zugehörigen Halbmesser **OA** und **BO** verhalten, und

$$\frac{Aa}{OA} = \frac{Bb}{BO} \text{ ist.}$$

Nun haben wir §. 12 der II. Abtheilung gesehen, daß, wenn **AO** der Radius des Kreises, in welchem die Drehung erfolgt, und **Op** der Perpendikel aus dem Drehpuncte auf die Kraftrichtung ist, die mechanische Arbeit der Kraft in Bezug auf die Bewegung des Punctes **A** zum Maße $P \,.\, Op \,.\, \frac{Aa}{OA}$ hat. Für den Punct **B**, als andern Angriffspunct der Kraft P, erhalten wir daher nach demselben Vorgange $P \,.\, Op \,.\, \frac{Bb}{BO}$ zur mechanischen Arbeit. Diese beiden Ausdrücke unterscheiden sich nur durch die Factoren $\frac{Aa}{OA}$ und $\frac{Bb}{BO}$. Da aber diese, wie wir aus der Figur ersehen haben, einander gleich sind, so wird auch die Arbeitsgröße der Kraft P stets einen und denselben Werth haben, in welchem Puncte ihrer Richtung sie auch angreifen und Bewegung hervorbringen mag.

2ter Fall. Hat der Körper eine progressive Bewegung, so werden die in der Kraftrichtung beliebig angenommenen Angriffspüncte A und B (Fig. 57) parallele und gleiche Wege Aa und Bb beschreiben, so daß auch die Projectionen Aa′ und Bb′ dieser Wege zur Richtung der Kraft, und folglich auch die der Bewegung der zwei verschiedenen Angriffspuncte entsprechenden Arbeitsgrößen P . Aa′ und P . Bb′ einander gleich sind.

3ter Fall. Nehmen wir an, die Bewegung sei weder drehend noch progressiv, sondern irgend einer andern Art, und die Kraft AP (Fig. 58) sei vermöge derselben aus der Stellung AB in die von A′B′ übergegangen, wobei die Puncte A und B der Kraftrichtung AP nach a und b gekommen sind, so können wir uns diese Bewegung auch als aus zwei anderen, einer kreisförmigen und einer progressiven, zusammengesetzt denken. Die Puncte A und B würden nämlich ebenfalls nach a und b gelangt sein, wenn sie sich zuerst in den kleinen Kreisbögen AA_1 und BB_1 um den Mittelpunct O eines die beiden unendlich nahen Stellungen der Kraftrichtungen berührenden Kreises, und hierauf in den geraden Linien A_1a und B_1b bewegt hätten. Betrachtet man daher A und B als Angriffspuncte einer und derselben Kraft und projicirt die Wege Aa und Bb derselben gegen die Kraftrichtung AP, so ist in Bezug auf die Bewegung des Punctes A das Product P . Aa′ und in Bezug auf die von B das Product P . Bb′ die Arbeitsgröße der Kraft P.

Nun ist $Aa' = A'a' - A'A$ und $Bb' = B'b' - B'B$, folglich auch

$$(\alpha) \ldots P . Aa' = P . A'a' - P . A'A \text{ und}$$
$$(\beta) \ldots P . Bb' = P . B'b' - P . B'B.$$

Die Größen A′A und B′B sind nichts anderes, als die zur Kreisbewegung gehörigen und auf die Kraftrichtung bezogenen Wege, für welche wir bei Betrachtung des 1sten Falls die Gleichheit der Arbeitsgrößen P . A′A und P . B′B gefunden haben. Ferner sind A′a′ und B′b′ wieder die

in Bezug auf die progressive Bewegung gegen die Kraftrichtung projicirten Wege, so daß auch nach dem 2ten Falle P . A'a' und P . B'b' einander gleich sind. Macht man hiervon für die Gleichungen (α) und (β) Gebrauch, so folgt

$$P . Aa' = P . Bb',$$ d. h.,

daß die Arbeitsgröße einer Kraft auch für diesen 3ten Fall immer die nämliche ist, welcher Punct der Kraftrichtung auch der Angriffspunct sein mag.

Für jede Art der Bewegung gilt demnach die §. 11 der II. Abtheilung gefundene Relation zwischen der Arbeitsgröße der Mittelkraft und der Seitenkräfte, gleichviel, wo jede der Kräfte in ihrer eigenen Richtungslinie angreift.

16. Für gewisse Fälle ist das Moment der Mittelkraft Null. — Sind p, q und r die Hebelsarme der Kräfte P, Q und ihrer Mittelkraft R, so ist nach §. 12 der II. Abtheilung

$$Rr = Pp \pm Qq.$$

Soll nun das Moment der Mittelkraft Null werden, so ist dies nur möglich, wenn die Momente Pp und Qq der Seitenkräfte einander gleich sind und entgegengesetzte Größen sind. Da für $Rr = 0$ entweder $R = 0$ oder $r = 0$ sein muß, so wird das Moment der Mittelkraft Null sein, wenn 1) diese Kraft selbst Null, wenn also der Körper von selbst im Gleichgewicht ist; 2) wenn der aus dem als unverrückbar angenommenen Drehpuncte auf die Kraftrichtung gefällte Perpendikel, der sogenannte Hebelsarm, Null ist, d. h., wenn die Richtung der Resultante durch den festen Drehpunct selbst geht. Gleichen Momenten der Seitenkräfte entsprechen aber gleiche Arbeitsgrößen derselben, und da diese, weil sie im entgegengesetzten Sinne ausgeübt werden, einander gegenseitig vernichten, so wird, wenn die Mittelkraft zweier auf einen Körper wirkender Kräfte durch den Drehpunct geht, der Körper ebenfalls im Gleichgewichte sein.

II.

Parallele Kräfte.

17. Verwandtschaft zwischen zwei zusammenlaufenden und zwei parallelen Kärften. —

Die Sätze über die Vereinigung zweier auf einen Körper und nach zusammenlaufenden Richtungen wirkender Kräfte **P** und **Q** haben uns gelehrt, 1) daß die Richtungslinie ihrer Mittelkraft **R** durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct **O** (Fig. 59) beider Kraftrichtungen geht; 2) daß das Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen mit den Kräften in einer Ebene liegenden Punct **K** den vereinigten Momenten beider Seitenkräfte, d. h. der Summe oder Differenz ihrer Momente gleich ist, je nachdem sie den Körper um den Punct **K** in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne zu drehen streben. Dieses Verhalten zwischen den Mittel- und Seitenkräften ist, wie wir wissen, durchaus unabhängig von der Entfernung des gemeinschaftlichen Durchschnittspunctes der Kräfte bis zu ihren wirklichen Angriffspuncten; es wird daher auch dann noch stattfinden, wenn diese Entfernung sehr groß, selbst wenn sie unendlich ist, d. h, wenn die Kräfte parallel wirken. Deshalb kann man auch Kräfte, welche (wie die Schwerkräfte nach dem Mittelpuncte der Erde) convergiren, als parallele Kräfte betrachten, wenn der Durchschnittspunct der Kraftrichtungen hinreichend entfernt ist. Wir schließen aus dieser Uebereinstimmung zwischen parallelen und convergirenden Kräften, daß die Mittelkraft zweier paralleler Kräfte in der Ebene derselben liegt und mit ihnen parallel, und daß, in Bezug auf einen beliebigen Punct die

ser Ebene, ihr Moment den Momenten der Seitenkräfte zusammengenommen gleich ist.

18. Mittelkraft zweier paralleler Kräfte. — Sind AP und BQ (Fig. 60) die Richtungen der Kräfte P und Q, welche einander parallel auf die Puncte A und B eines Körpers wirken, und ist K ein Punct in der durch diese Kraftrichtungen gelegten Ebene, so werden die Perpendikel, welche man von diesem Puncte gegen Richtungslinien der Kräfte fällen kann, in die Linie KE zusammenfallen, und man wird, wenn R die Mittelkraft bezeichnet, als Hebelsarme die Theile Ka, Kb und Kc erhalten. Da nun die Kräfte den Körper nach einer und derselben Seite zu drehen suchen, so wird nach dem Früheren

$$R \,.\, Kc = P \,.\, Ka + Q \,.\, Kb$$

sein. Diese Relation zwischen den Momenten der Mittelkraft und der Seitenkräfte gilt aber für jede Lage des Punctes K, so daß man diesen Punct auch nach a verlegen und $Ka = o$, $Kc = ac$ und $Kb = ab$, mithin

$$R \,.\, ac = Q \,.\, ab,$$

oder daß man ihn nach b verlegen, $Kc = bc$, $Ka = ab$, $Kb = o$, folglich

$$R \,.\, bc = P \,.\, ab$$

setzen kann. Vereinigt man diese Gleichung mit der vorigen, so folgt

$R\,((ac + bc) = (P + Q)\,ab$ und da $ac + bc = ab$ ist,

$R = P + Q$,

d. h. die Mittelkraft zweier übereinstimmend wirkender paralleler Kräfte ist ihrer Summe gleich.

Hätten wir die Kräfte P und Q statt in gleichem, in entgegengesetztem Sinne wirksam angenommen, so würden wir

$$R \,.\, Kc = P \,.\, Ka - Q \,.\, Kb$$

gesetzt und durch eine Reihe ähnlicher Betrachtungen

$$R = P - Q,$$

d. h. die Mittelkraft der Differenz der beiden Seitenkräfte gleich gefunden haben.

Wird der Punct K nach c verlegt, so befinden sich die Kräfte P und Q in dem Falle, einander entgegengesetzt zu wirken, und es wird dann $Kc = o$, $Ka = ac$, $Kb = bc$ und $o = P \cdot ac - Q \cdot bc$, daher

$$P \cdot ac = Q \cdot bc.$$

Da diese Gleichung die Proportion $\frac{bc}{ac} = \frac{P}{Q}$ gibt, so wird die Linie ab, welche die Angriffspuncte der beiden parallelen Kräfte verbindet, durch die Mittelkraft in zwei Theile getheilt, welche sich umgekehrt wie die Kräfte verhalten *).

Weit häufiger kommt es vor, daß die Angriffspuncte der Kräfte P und Q in einer gegen die Kraftrichtungen geneigten Linie AB (Fig. 62) liegen. Fällt man dann vom Puncte K' einen Perpendikel gegen die Richtungslinien der Kräfte und verlegt die Angriffspuncte, wie es §. 13

---

*) Leicht ist es, durch eine geometrische Construction den Hebelsarm der Mittelkraft oder was dasselbe ist, den Angriffspunct derselben zu bestimmen. Trägt man nämlich auf eine durch a (Fig. 61) gehende und beliebig geneigte Linie ag die Theile ae und ef den Kräften Q und P proportional auf und zieht mit bf parallel die Linie ec, so erhält man in c den gesuchten Punct; denn es ist sowohl $\frac{ef}{ae} = \frac{P}{Q}$, als auch $\frac{ef}{ae} = \frac{bc}{ac}$, mithin wie oben $\frac{bc}{ac} = \frac{P}{Q}$. Aus der nämlichen Figur folgt auch

$$\frac{ac}{ab} = \frac{ae}{af} = \frac{Q}{P+Q} = \frac{Q}{R},$$ so daß $bc : ac : af = P : Q : R$,

d. h. jede von den drei Kräften P, Q, R dem Theile der Linie ab proportional ist, welcher zwischen den beiden anderen liegt.

Daß die Construction die nämliche bleibt, wenn die Linie ab (Fig. 61) die Kraftrichtungen statt unter rechten, unter schiefen Winkeln schneidet, ergibt sich aus dem folgenden Inhalte des Paragraphen.

der II. Abtheilung zufolge gestattet ist, nach A″, B″, C″, so findet in Bezug auf diese Puncte die frühere Bedingungs-Gleichung

$$R \,.\, K'C'' = P \,.\, K'A'' + Q \,.\, K'B''$$

statt. Diese geht vermöge der Proportionalität der Linien K′A, K′B, KC und K′A″, K′B″, K′C″ in

$$R \,.\, K'C = P \,.\, K'A + Q \,.\, K'B$$

über, in welcher die Perpendikel zur Kraftrichtung durch die einfachen Entfernungen der Angriffspuncte der Kräfte von dem mit ihnen in einer beliebigen gerad̃en Linie liegenden Puncte K′ ersetzt sind. Der Angriffspunct der Mittelkraft, vorläufig im Puncte C gefunden, kann alsdann wieder in der Richtung derselben, also z. B. nach c verlegt werden, ohne daß dadurch ihre Wirkung verändert wird.

19. Moment zweier paralleler Kräfte in Bezug auf eine gerade Linie. — Häufig macht man bei parallelen Kräften von ihren auf eine gerade Linie bezogenen Momenten Gebrauch und versteht darunter die Producte aus den Kräften in die von ihren Angriffspuncten gegen eine Linie, die Momentenaxe gefällten Perpendikel.

Sind A, B, C (Fig. 63) die Angriffspuncte zweier paralleler Kräfte P und Q und ihrer Mittelkraft R, ist LK′ die Momentenaxe, welche die durch die Angriffspuncte der Kräfte gehende Gerade in K′ schneidet, so kann nach dem Vorigen

$$R \,.\, K'C = P \,.\, A'A + Q \,.\, K'B \text{ und}$$

$$R = P \,.\, \frac{K'A}{K'C} + Q \,.\, \frac{K'B}{K'C}$$

gesetzt werden. Fällt man nun wirklich die Perpendikel von den Puncten A, B und C gegen die Linie LK′, so erhält man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke K′AA′, K′BB′, K′CC′

$$\frac{K'A}{K'C} = \frac{AA'}{CC'} \text{ und } \frac{K'B}{K'C} = \frac{BB'}{CC'}$$

und, wenn man diese Werthe in die vorige Gleichung einführt,

$$R = P \cdot \frac{AA'}{CC'} + Q \cdot \frac{BB'}{CC'} \text{ oder } R \cdot CC' = P \cdot AA' + Q \cdot BB'$$

d. h. das Moment der Mittelkraft in Bezug auf eine gerade Linie ist den vereinigten Momenten der Seitenkräfte gleich.

20. Moment zweier paralleler Kräfte in Bezug auf eine Ebene. — Ist **MO** (Fig. 64) eine Ebene, eine sogenannte Momentenebene, auf welche die Momente bezogen werden sollen, sind A, B und C die Angriffspuncte der Kräfte P, Q und ihrer Mittelkraft R und sind AA', BB', CC' die von den Angriffspuncten der Kräfte gegen die Ebene gefällten Perpendikel, so sind die Momente der drei parallelen Kräfte in Bezug auf MO durch $P \cdot AA'$, $Q \cdot BB'$, $R \cdot CC'$ ausgedrückt. Stellt man nun hier die nämlichen einfachen Betrachtungen an, wie im vorigen Paragraphen, so gelangt man wieder zu der Gleichung

$$R \cdot CC' = P \cdot AA' + Q \cdot BB'$$

und sieht daraus, daß in Bezug auf eine Ebene das Moment der Resultante ebenfalls der Summe der Momente der Componenten gleich ist.

21. Moment und Größe der Mittelkraft mehrerer paralleler Kräfte. — Bezeichnen Pp, Qq und Rr die Momente zweier paralleler Kräfte und ihrer Mittelkraft in Bezug auf einen Punct, eine Linie oder eine Ebene, so wissen wir aus dem Früheren, daß

$$Rr = Pp + Qq \text{ ist.}$$

Nun kann aber Q wieder als die Mittelkraft von zwei anderen parallelen Kräften P_1 und P_2, deren Momente P_1p_1, P_2p_2 sind, gedacht werden; dies gibt

$$Qq = P_1p_1 + P_2p_2$$

und folglich

$$Rr = Pp + P_1p_1 + P_2p_2.$$

Das Moment jeder dieser Seitenkräfte kann wiederum als das Moment einer Mittelkraft aus andern Seitenkräften betrachtet werden, so daß, wenn Σ (Pp) die Summe der

Momente aller nach einer Seite wirkenden Kräfte, vermindert um die Summe der Momente aller nach der andern Seite gerichteten, bezeichnet,

$$Rr = \Sigma (Pp)$$

d. h. das Moment der Mittelkraft zu einer beliebigen Anzahl paralleler Seitenkräfte den Momenten dieser zusammengenommen gleich ist.

Ganz so verhält sich's mit den Intensitäten der Kräfte und es ist auch die Größe der Mittelkraft aus jeder Anzahl von parallelen Seitenkräften der Differenz gleich aus den Summen der nach der einen und der nach der andern Seite wirkenden Componenten. Hinsichtlich ihrer Richtung ist die Resultante den Componenten parallel und der größern Summe der Seitenkräfte entsprechend.

Parallelwirkende Kräfte in größerer Anzahl sind z. B. die an den Strängen eines Fuhrwerks angebrachten Zugkräfte; auch die an einem Körper angebrachten Gewichte können, wie wir gesehen haben, als solche betrachtet werden.

22. Bestimmung des Angriffspunctes der Mittelkraft mit Hülfe der Momente. — Der Ausdruck $Rr = \Sigma (Pp)$ gibt $r = \frac{\Sigma (Pp)}{R} = \frac{\Sigma (Pp)}{\Sigma (P)}$, weil R nicht anderes, als die algebraische Summe $\Sigma (P)$ aus allen Seitenkräften ist. Sind daher die Momente der parallelen Seitenkräfte in Bezug auf einen Punct bekannt, so gibt r ohne Weiteres die Entfernung des Angriffspunctes der Mittelkraft von jenem Puncte an. Bezeichnet aber $\Sigma (Pp)$ die Momentensumme in Bezug auf eine Axe, und sind hierzu noch die Momente der Seitenkräfte in Bezug auf eine zweite der vorigen nicht parallele Axe gegeben, so erhält man, wenn man für beide Axen r bestimmt, die Entfernungen des Angriffspunctes der Mittelkraft von denselben, wodurch die Lage dieses Punctes selbst ganz vollkommen festgestellt ist. Bezieht sich $\Sigma (Pp)$ auf eine Momentenebene, so ist r der Abstand derselben von einer ihr

parallelen Ebene, in welcher der Angriffspunct der Mittelkraft liegt. Da aber erst drei Ebenen die Lage eines Punctes vollständig bestimmen, so muß r noch in Bezug auf zwei andere Momentenebenen gesucht werden, um den Punct des Angriffs der Mittelkraft zu finden. Eine Ebene und eine gerade Linie haben ebenfalls einen Punct gemeinschaftlich, wenn sie nicht mit einander parallel sind; man wird daher auch mit Hülfe der Momente in Bezug auf eine Ebene und eine Axe die Lage des Angriffspunctes der Mittelkraft finden können *).

23. Mittelpunct der parallelen Kräfte. — Wenn die gegebenen parallelen Kräfte sich um ihre Angriffspuncte drehen und andere Lagen annehmen, ohne daß jedoch ihr Parallelismus aufhört, so wird die Richtung der Mittelkraft sich ebenfalls verändern, ihr Angriffspunct aber der nämliche bleiben. Denn wenn man bedenkt, wie im vorigen Paragraphen durch Rechnung sowohl als durch Construction die Lage dieses Punctes gefunden werden konnte, so wird man auch leicht einsehen, daß dieselbe keineswegs von der gemeinschaftlichen Richtung der parallelen Kräfte abhängt, sondern für alle Richtungen derselben unveränderlich ist. Man darf sich z. B. nur die Kräfte P, P_1, P_2 . . . (Fig. 65) in die veränderten, aber immer noch parallelen Lagen AQ,

---

*) Um durch Construction den Angriffspunct der Mittelkraft zu mehreren Seitenkräften zu bestimmen, darf man nur zu zweien der letztern die Mittelkraft und ihren Angriffspunct auf die in §. 18 der II. Abtheilung angegebene Weise, durch das nämliche Verfahren den Angriffspunct der erhaltenen Resultante mit einer dritten Seitenkraft u. s. f. bis zur letzten Seitenkraft aufsuchen. Sind z. B. P, P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 64) parallele Kräfte, welche in A, B, C, D, E angreifen, so erhält man durch diese Construction zuerst in F den Angriffspunct der Mittelkraft aus P und P_1, in G den der Resultante aus der vorigen und P_2 u. s. f.; und endlich in K den der Mittelkraft aus sämmtlichen parallelen Componenten.

AQ_1, AQ_2... gebracht denken und sich für diese neue Richtung der Kräfte die Bestimmung des Angriffspunctes der Mittelkraft zur Aufgabe machen, so überzeugt man sich bald, daß die Mittelkraft ihren Angriffspunct beibehält. Den Punct nun, durch welchen alle auf einander folgenden Richtungen der Mittelkraft gehen, wenn sich die parallelen Kräfte gleichviel um ihre Angriffspuncte drehen, nennt man den Mittelpunct der parallelen Kräfte. Ist dieser Punct eines Körpers befestigt, dann wird der Körper im Gleichgewichte bleiben, welche Richtung auch die parallelen Kräfte, welche auf ihn wirken, annehmen mögen.

24. Anwendung der Lehre von den Momenten auf die Schnellwaage. — Die Schnellwaage besteht in einem Wagebalken, der sich um eine Axe bei C (Fig. 66) drehen kann, und an dessen einem Arme eine zu wiegende Last angehängt wird, während man am andern ein constantes Gewicht Q, das Laufgewicht, in eine dem Gleichgewichte entsprechende Entfernung BC von der Drehaxe bringt. Wir wissen, daß die Resultante der Kräfte P und Q durch den festen Punct C gehen muß, wenn Gleichgewicht zwischen denselben stattfinden soll, daß $P \cdot AC = Q \cdot BC$ sein muß. Dies gibt $BC = \frac{P}{Q} \cdot AC$ für die Entfernung des Laufgewichts von der Axe. Wäre nun das Laufgewicht 1 Pfund, so würde $BC = P \cdot AC$ und für die Lasten von 1, 2, 3, 4 u. s. w. Pfund das Gewicht P in die Entfernungen AC, 2AC, 3AC, 4AC u. s. f. von der Axe zu bringen sein.

Man sieht daraus, daß die Eintheilung der Schnellwaage ganz einfach darin besteht, den längeren Arm des Waagebalkens in Theile von der Größe des kürzeren zu theilen; ihn, wenn der letztere z. B. 1 Zoll betrüge, in Zolle abzutheilen. Hätte man alsdann das Laufgewicht 15 Zoll von der Axe entfernen müssen, um Gleichgewicht mit einem angehängten Körper hervorzubringen, so wüßte man sofort, daß das Gewicht desselben 15 Pfund beträgt.

25. Mechanische Arbeit der Mittelkraft aus mehreren parallelen Seitenkräften. — Nehmen wir an, daß ein Körper, unter der Wirkung der parallelen Kräfte P, Q, R (Fig. 67) nach der einen und P′, Q′, R′ nach der andern Seite sich im Sinne der erstern bewege, so ist es klar, daß der Weg der Angriffspuncte aller dieser Kräfte ein und derselbe ist. Die mechanische Arbeit einer solchen Kraft wird daher das Product aus diesem, allen Seitenkräften gemeinschaftlichen, kleinen Wege in die Intensität der in Rede stehenden Kraft, daher die Arbeit der sämmtlichen Seitenkräfte das Product aus dem nämlichen Wege in den Ueberschuß der Kräfte P, Q, R über P′, Q′, R′, d. i. in die Resultante sein. Dieses Product gibt, da der Mittelkraft der nämliche Weg entspricht, auch die mechanische Arbeit der letztern an. **Demnach ist die Arbeit der Resultante einer beliebigen Anzahl paralleler Kräfte der Totalarbeit der Componenten gleich.**

III.

Vom Schwerpuncte der Körper.

26. Schwerpunct. — Jeder Körper kann als der Inbegriff einer unendlichen Menge schwerer materieller Puncte, in unendlich kleinen Entfernungen von einander, betrachtet werden, welche gewissermassen die Angriffspuncte ebenso vieler untereinander paralleler, vertikal wirkender Kräfte sind. Da nun die in den früheren Paragraphen, bei den Untersuchungen über den Angriffspunct der Mittelkraft und über den Mittelpunct paralleler Kräfte, gewonnenen Resultate unabhängig von der Anzahl wie von den Abständen der parallelen Kräfte sind, so werden dieselben auch hier ihre Giltigkeit behalten; es wird daher auch in dem Körper einen Punct geben, in welchem man sich die Mittelkraft wirkend oder die Summe aller der kleinen Schwerkräfte vereinigt denken kann. Diesen Punct, welcher nach §. 23 der II. Abtheilung im Allgemeinen als Mittelpunct der parallelen Kräfte bezeichnet wurde, nennt man, wenn von der Schwere die Rede ist, den Mittelpunct der Schwere oder Schwerpunct.

27. Mechanische Auffindung des Schwerpuncts der Körper. — Der Mittelpunct der parallelen Kräfte ändert sich nicht, wenn diese Kräfte, indem sie untereinander parallel bleiben, sich um ihre Angriffspuncte drehen. Diese Eigenschaft wird folglich auch der Schwerpunct eines Körpers haben, d. h. er wird unveränderlich derselbe bleiben, wenn die Schwerkräfte sich um ihre Angriffspuncte, oder, was den nämlichen Erfolg hat, wenn der Körper selbst sich

dreht, während jene und ihre Resultante, das Gewicht des Körpers, ihre vertikale Richtung unwandelbar beibehalten. Hierin lassen sich leicht Mittel erkennen, die Schwerpuncte solcher Körper zu bestimmen, welche ihre Gestalt nicht verändern. Ein Körper nämlich, den man an einem Faden aufhängt, nimmt eine solche Lage an, daß die Kraft, welche ihn hält, mit der Resultante aller der kleinen Schwerkräfte seiner Molecule Gleichgewicht hervorbringt. Es muß daher die Richtung des Fadens AC (Fig. 68) mit der durch den Schwerpunct S gehenden Vertikale zusammenfallen, oder der Befestigungspunct C des Körpers am Faden und der Schwerpunct S müssen in derselben Lothlinie liegen, welche durch den Aufhängpunct A des Fadens geht. Ebenso wird sich die Sache verhalten, wenn man den Faden an einem anderen Puncte des Körpers befestigt, und, so oft dies geschieht, so viele gerade Linien wird man erhalten, welche alle durch den Schwerpunct des Körpers gehen. Aus gleichen Gründen kann man auch den Körper auf einer Spitze A (Fig. 69) balanciren, sofern nur die Vertikale durch seinen Schwerpunct mit der durch die Spitze zusammenfällt, und alle Lagen, in welchen dieser Bedingung Genüge geleistet wird, bestimmen auf diese Weise Linien, welche durch den Schwerpunct gehen. Zwei solche auf die eine oder die andere Weise gefundene Linien geben dann in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte den gesuchten Schwerpunct.

Um die Puncte zu erhalten, in welchen die Oberfläche des Körpers von diesen Linien getroffen wird, kann man den Körper (Fig. 70) an einem Faden aufhängen, zu beiden Seiten desselben Lothe a, b so anbringen, daß sie mit dem Faden in eine Ebene fallen und eine durch den Schwerpunct gehende Vertikalebene fixiren. Zieht man dann mit einem Zeichnenstifte den Durchschnitt dieser Vertikalebene mit der Oberfläche des Körpers, und wiederholt man die Operation für eine zweite Vertikalebene, die ebenfalls durch den Faden AB geht, so kreuzen sich die beiden auf dem Körper verzeichneten Linien in zweien der gesuchten Puncte.

28. Bestimmung des Schwerpuncts durch Rechnung und mit Hülfe der Geometrie. — Daß die vorige Methode auf sehr schwere oder ganz unbewegliche Körper nicht anwendbar sein kann, ist begreiflich, und doch ist es oft nöthig, die Lage ihrer Schwerpuncte zu kennen. Ja noch häufiger kommt es auf die Bestimmung dieser Puncte im Voraus an bei Körpern, welche noch gar nicht vorhanden sind, deren Construction erst beabsichtigt wird, deren Form aber geometrisch oder durch Zeichnungen gegeben ist.

Denkt man sich den Körper durch eine Menge Schnitte in Theile zerlegt und sucht man das Moment des Gewichts von jedem solchen Theile in Bezug auf eine Ebene, so kann man zur Ermittelung des Schwerpuncts den Weg einschlagen, nach welchem in den Paragraphen 21 und 22. der II. Abth. der Angriffspunct paralleler Kräfte gefunden wurde. Versteht man daher unter Σ (Pp) die Summe jener Momente und unter R das Gewicht des ganzen Körpers, so wird der Quotient $r = \frac{\Sigma (Pp)}{R}$ auch die Entfernung einer durch den Schwerpunct gehenden und zu der, auf welche die Momente bezogen wurden, parallelen Ebene sein. Der Durchschnittspunct der letzteren mit zwei anderen, welche durch dasselbe Verfahren gesucht werden, ist der Schwerpunct des Körpers.

Je nach Umständen aber läßt sich diese Methode abkürzen, zumal wenn es auf die Schwerpuncte homogener Körper, d. h. solcher ankommt, von welchen gleichgroße Theile gleichschwer sind.

29. Schwerpunct regelmäßiger Körper. — Wenn eine durchaus homogene Stange AB (Fig. 71) von Holz, Eisen oder dergleichen in der Mitte C ihrer Länge und Breite an einem Faden aufgehängt wird, so bleibt sie im Gleichgewichte nach beiden Richtungen hin. Dasselbe wird auch nicht gestört, wenn an den Enden der Stange zwei ganz gleiche Kugeln M, M angebracht werden; in beiden

Fällen muß daher der Schwerpunct in der Mitte der Länge und Breite der Stange liegen. Hängt man eine dieser Kugeln nach und nach an verschiedenen Puncten ihrer Oberfläche mittelst eines Fadens auf, so geht allemal die Verlängerung der vertikalen Linie desselben durch den Mittelpunct der Kugel, der deshalb auch ihr Schwerpunct sein muß. Ueberhaupt fällt bei allen regelmäßigen und homogenen Körpern der Schwerpunct mit dem geometrischen Mittelpuncte zusammen. Der Schwerpunct des geraden Prisma's und Cylinders liegt daher in der Mitte der Axe. Auch bei regulären Flächen sind die Mittelpuncte zugleich Schwerpuncte, wenn man sich darunter Körper von sehr geringer Dicke, wie Blech, Papier u. s. f., vorstellt. Der Schwerpunct einer Kreisfläche und ihr Mittelpunct sind deshalb einerlei. Und denkt man sich dünne Drähte oder überhaupt Körper von verhältnißmäßig sehr geringer Breite und Dicke als Linien, so wird auch für den Umfang regulärer Figuren der Schwerpunct wieder in der Mitte derselben zu suchen sein, wie der einer geraden Linie im Halbirungspuncte.

30. Schwerpunct symmetrischer Körper. — Einen Körper nennen wir symmetrisch in Bezug auf eine Ebene, die Symmetrie-Ebene, wenn diese alle Linien, welche, senkrecht zu ihr, gegenüberliegende Puncte des Körpers verbinden, in zwei gleiche Theile zerlegt. Symmetrisch in Bezug auf eine Axe, die Symmetrie-Axe, heißt der Körper, wenn er zwei Ebenen der Symmetrie besitzt, die sich in dieser Linie schneiden, und eine ebene Fläche heißt symmetrisch in Bezug auf eine Linie, wenn die Perpendikel gegenüberliegender Begrenzungspuncte gegen dieselbe einander gleich sind. In allen diesen Fällen liegt der Schwerpunct in der Ebene oder der Axe der Symmetrie. In den beiden Hälften der in Bezug auf AB symmetrischen Fläche (Fig. 72) z. B. liegen die Schwerpuncte S und S′ ebenfalls symmetrisch; denn wollte man sie aufeinander legen, daß sie sich decken, so würden die Schwerpuncte S und S′ zusammenfallen. Nun können aber diese als die Angriffspuncte der Gewichte der beiden schweren

Flächenhälften angesehen werden und SS' als eine durch zwei materielle Puncte begrenzte Linie, deren Schwerpunct ihre Mitte O, d. i., ein Punct der Symmetrieare AB ist.

Hat eine Fläche zwei Aren oder ein Körper zwei Ebenen der Symmetrie, so wird ihr Schwerpunct in beiden zugleich, mithin in ihrem Durchschnittspuncte oder ihrer Durchschnittslinie liegen. Die große und kleine Axe der Ellipse bestimmen daher den Schwerpunct dieser Flächenfigur im Mittelpuncte derselben, weil sie Symmetrie-Aren sind und dort sich schneiden. Das Rechteck hat ebenfalls zwei Aren der Symmetrie, welche von Mitte zu Mitte der parallelen Seiten gehen. Ihr Durchschnittspunct, zugleich der der Diagonalen, ist daher der Schwerpunct des Rechtecks. Durch den geraden Cylinder von elliptischer Grundfläche lassen sich zwei Ebenen der Symmetrie, eine durch die großen, die andere durch die kleinen Aren der gegenüberliegenden Grundflächen legen; in der Durchschnittslinie beider Ebenen, d. i. in der Linie, welche die Schwerpuncte der beiden Ellipsen verbindet, liegt daher der Schwerpunct dieses Cylinders und zwar, wie man leicht einsieht, in ihrer Mitte S (Fig. 73). Manche Körper und Flächen, welche durch Umdrehung einer ebenen Figur oder einer Linie entstanden sind, die sogenannten Rotations-Körper und Flächen haben unzählige Ebenen der Symmetrie, die sich jederzeit in der Umdrehungsaxe schneiden, in welcher daher auch ihr Schwerpunct gesucht werden muß. Die Kugel kann als ein Körper betrachtet werden, bei welchem alle Symmetrie-Ebenen durch den Mittelpunct gehen, weshalb dieser auch der Schwerpunct ist.

31. Schwerpunct regelmäßiger, aus zwei ungleichartigen Theilen zusammengesetzter Körper. — Den regelmäßigen Körper, von welchem gleiche Theile nicht gleichschwer sind, kann man zuerst als gleichartig betrachten und unter dieser Annahme annähernd den Schwerpunct O (Fig. 74) desselben aufsuchen. Denkt man sich nun in diesem Puncte das Gewicht p des als homogen angenommenen Körpers beisammen und ist P das

wirkliche Gewicht desselben, so ist P — p das auf der Seite des schwerern Körpertheils bis dahin vernachläßigte Gewicht, das man sich wieder in dessen Schwerpunct O′ concentrirt vorstellen kann. Die Gewichte p und P — p bedeuten daher Intensitäten zweier paralleler Kräfte, deren Mittelkraft in einem Puncte K angreift, für welchen

$$p \cdot OK = (P - p)\, KO'$$

ist. Diese Mittelkraft aber ist (P — p) + p = P, das wahre Gewicht des Körpers, folglich auch K der Schwerpunct desselben.

32. Schwerpunct solcher Körper, welche sich durch Parallelschnitte in congruente oder ähnliche Theile zerlegen lassen. — Die Linie, welche die Schwerpuncte aller Elemente verbindet, in welche man einen solchen Körper durch parallele Ebenen zerlegen kann, enthält auch den Schwerpunct des ganzen Körpers. Sind nämlich diese Elemente, wie vorausgesetzt wurde, gleich oder ähnlich, so werden auch ihre Schwerpuncte gleich- oder ähnlichliegend sein und in eine gerade Linie fallen. In ihr liegen also die Angriffspuncte aller parallelen Schwerkräfte, daher wird auch der ihrer Mittelkraft, der Schwerpunct des ganzen Körpers, darin zu finden sein. An Körpern von solcher Gestalt, daß sie sich auch nach einer zweiten Ebene wieder in gleiche oder ähnliche Theile zerlegen lassen, kann folglich sehr leicht der Ort des Schwerpuncts angegeben werden; denn hat man zwei Linien kennen gelernt, von welchen jede den Schwerpunct enthält, so kann derselbe nirgends anders, als im gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte derselben liegen.

33. Schwerpunct eines Parallelogramms. — Das Parallelogramm ABCD (Fig. 75) z. B. läßt sich in schmale, zur Seite AB parallele, Streifen zerlegen, deren Schwerpuncte in der Mitte ihrer Länge liegen und sämmtlich in die durch die Halbirungspuncte E und F der parallelen Seiten CD und AB gehende Gerade EF fallen. Aber auch nach einer andern Richtung und parallel zu AC kann die nämliche Figur in solche Streifen zerlegt werden, deren

Schwerpuncte alle in der Linie IH liegen müssen, welche die Mitte von AD mit der der gegenüberliegenden Seite BC verbindet. Der Durchschnitt O der beiden Linien, der nämliche Punct, in welchem sich die Diagonalen schneiden, ist demnach der Schwerpunct des Parallelogramms.

34. Schwerpunct eines Parallelepipedons. — Jedes Parallelepipedon kann nach drei Ebenen in gleiche Elemente zerlegt werden, welche alle als schwere Parallelogramme ihre Schwerpuncte in dem Durchschnittspuncte ihrer Diagonalen haben werden. Die Linie, welche die Schwerpuncte zweier gegenüberliegender Flächen der Parallelepipedons verbindet, enthält daher die Schwerpuncte aller der zwischenliegenden Elemente und den des ganzen Körpers selbst. Auf diese Weise erhalten wir zu den drei Flächenpaaren des Parallelepipedons drei Linien, von welchen zwei schon hinreichen würden, durch ihren Durchschnitt die Lage des Schwerpuncts zu bestimmen. Die drei Diagonalen des Parallelepipedons schneiden sich bekanntlich in dem nämlichen Puncte.

35. Schwerpunct eines Dreiecks. — Bezeichne ABC (Fig. 76) eine Dreiecksfläche, durch Parallelen mit der Seite AC in unendlich viele, sehr schmale Streifen zerschnitten, so kann man jeden dieser Streifen als eine Linie betrachten; die Schwerpuncte aller dieser Linien, welche in ihren Mittelpuncten liegen, fallen daher in die Gerade BD, welche die Spitze B mit der Mitte D der gegenüberliegenden Seite verbindet, und diese enthält auch den des ganzen Dreiecks. Parallel zu einer der beiden andern Seiten, z. B. zu BC, kann man eine solche Zertheilung in ähnliche Elemente ebenfalls vornehmen, wodurch sich eine zweite Linie AF von der Spitze C zur Mitte der Seite BC ergibt, die ebenfalls durch den Schwerpunct geht. Die von den Ecken eines Dreiecks nach den Halbirungspuncten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Linien schneiden sich daher im Schwerpuncte. Denken wir uns jetzt die schwere Masse, statt gleichförmig auf die ganze Fläche vertheilt, in Gestalt

dreier gleichschwerer Kugeln in den Ecken derselben angehäuft, so haben wir zu zweien derselben, z. B. zu A und C den Schwerpunct in der Mitte D der Linie AC, und vereinigen wir diesen Punct, in welchem nun das Gewicht der beiden Kugeln gewissermaßen concentrirt ist, mit der dritten Kugel B, so wird die Linie BD den gemeinschaftlichen Schwerpunct aller drei enthalten müssen. Hätten wir die nämliche Betrachtung mit zwei andern der drei Kugeln begonnen und mit der dritten geschlossen, so würden wir zu dem Resultate gelangt sein, daß ihr Schwerpunct auch in den Linien AF und CE liegen müsse. Das Dreieck ABC und die Kugeln A, B, C haben daher einen und denselben Schwerpunct. Die Puncte D und B können wir aber auch als die Angriffspuncte zweier paralleler Kräfte ansehen, von welchen die in D doppelt so groß als die in B ist, und deren Mittelpunct die Linie DB so theilen muß, daß

$$2 . DG = 1 . BG, \text{ daher}$$

$$DG = \tfrac{1}{2} BG = \tfrac{1}{3} DB \text{ ist.}$$

Der Schwerpunkt eines Dreiecks befindet sich daher in der geraden Linie, welche durch die Spitze desselben nach der Mitte der Grundlinie geht und zwar in $\frac{2}{3}$ derselben von der Spitze oder in $\frac{1}{3}$ von der Grundlinie; er steht daher auch um $\frac{1}{3}$ der Höhe BK des Dreiecks von der Basis ab.

36. Schwerpunct eines beliebigen Vierecks.

— Die Diagonale AB theilt das Viereck ABCD (Fig. 77) in zwei Dreiecke DCB und DAB, deren Schwerpuncte nach dem vorigen Paragraphen sich in s und s_1 befinden, wenn E die Mitte der Diagonale BD und $Es = \frac{1}{3} EC$, so wie $Es_1 = \frac{1}{3} EA$ ist. Denkt man sich in den Schwerpuncten s und s_1 die Inhalte der Dreiecke DCB und DAB vereinigt, so liegt der Schwerpunct S der ganzen Fläche in der Linie ss_1 so, daß

$$DCB . Ss = DAB . Ss_1 \text{ oder } \frac{Ss}{Ss_1} = \frac{DAB}{DCB};$$

oder, da die Dreiecke DAB und DCB sich wie AF und CF verhalten,

$$\frac{Ss}{Ss_1} = \frac{AF}{CF}$$

ist. Dieser Proportion kann genügt werden, wenn man die Diagonale AC in K so abtheilt, daß $CK = AF$ und folglich $AK = CF$ wird, und wenn man K mit E verbindet. Es ist dann

$$\frac{Ss}{KC} = \frac{Ss_1}{AK} \text{ und } \frac{Ss}{Ss_1} = \frac{KC}{AK} = \frac{AF}{CF}.$$

Ist daher S der Punct, welcher die Linie ss, nach diesem Verhältnisse in zwei Theile theilt, so muß er auch der Ort des Schwerpuncts sein. Da nun noch $\frac{ES}{EK} = \frac{Es}{EC}$

$= \frac{\frac{1}{3}EC}{EC} = \frac{1}{3}$ oder $ES = \frac{1}{3}EK$ ist, so folgt daraus, daß man den Schwerpunct des Vierecks findet, wenn man die Diagonalen zieht, den kleinern Abschnitt AF der einen von C nach K aufträgt, den Punct K mit der Mitte E der andern Diagonale DB verbindet und den Theilpunct S bestimmt, welcher von der Linie EK vom Puncte E aus $\frac{1}{3}$ abschneidet.

37. Schwerpunct einer dreiseitigen Pyramide. — Die Schwerpuncte aller der Elemente, in welche man der Reihe nach eine dreiseitige Pyramide ABCD (Fig. 78), ihren vier Grundflächen ABC, BCD u. s. f. parallel, zerlegen kann, liegen für jeden der vier Fälle in der Linie, welche den Schwerpunct der betreffenden Grundfläche mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet, für die Zerlegung parallel der Fläche ABC, also z. B. in der Linie DG. Vier solche Linien schneiden sich demnach im Schwerpuncte der Pyramide. Drei Kugeln von gleichem Gewichte, in den Ecken A, B, C der Grundfläche vertheilt, haben nach §. 35 d. II. Abth. ihren Schwerpunct G in dem des Dreiecks ABC,

und, mit der vierten D verbunden, in der Linie DG. Der Durchschnittspunct der Geraden, welche aus den Ecken in die Schwerpuncte der gegenüberliegenden Flächen gehen, ist daher der Schwerpunct sowohl der Pyramide, als der vier Kugeln. Um nun die Lage desselben in einer dieser Linien genauer zu bestimmen, dürfen wir nur G und D als die Angriffspuncte paralleler Kräfte betrachten, die sich wie 3 : 1 verhalten und deren Mittelkraft im Puncte S der Geraden BD so liegen muß, daß

$$3 . GS = 1 . DS \text{ oder } GS = \tfrac{1}{3} DS = \tfrac{1}{4} DG.$$

Der Schwerpunct einer dreiseitigen Pyramide theilt also die Linie aus dem Schwerpuncte der Grundfläche nach der Spitze in $\frac{1}{4}$ ihrer Länge von jener an gemessen; er steht daher auch um $\frac{1}{4}$ der Höhe der Pyramide von der Grundfläche ab.

38. Schwerpunct einer vielseitigen Pyramide. — Auch bei jeder Pyramide von beliebiger Basis muß ganz ähnlichen Betrachtungen zufolge der Schwerpunct in der geraden Linie durch die Spitze und den Mittelpunct der Schwere für die Basis liegen. Erwägt man nun weiter, daß sich die vielseitige Pyramide in ebenso viele dreiseitige zerlegen läßt, wie die Grundfläche in Dreiecke, und daß alle die Schwerpuncte derselben von der Basis um $\frac{1}{4}$ der Höhe abstehen, so wird man erkennen, daß der gesuchte Punct S um $\frac{1}{4}$ von der Linie GS (Fig. 79), welche die Spitze mit dem Schwerpuncte der Basis verbindet, von letzterer abstehen muß. Dasselbe gilt auch für den Kegel, der sich als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachten läßt.

39. Schwerpunct eines beliebigen Polyeders. — Jedes Polyeder kann bekanntlich in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, deren Schwerpuncte sich nach dem Vorigen angeben lassen. Nun ist die Summe der Momente aller dieser Polyedertheile in Bezug auf eine Ebene dem des ganzen Körpers gleich. Werden daher diese Mo-

mente in Bezug auf drei sich schneidende Ebenen bestimmt, so ergibt sich, wie §. 28 d. II. Abth. gezeigt wurde, die Lage des Schwerpuncts durch seine Entfernungen von denselben.

40. Schwerpunct eines beliebig gestalteten Körpers. — Körper von krummen Flächen oder materiell gedachte Flächenfiguren, von Curven begrenzt, zertheile man in solche Theile, deren Schwerpuncte nach den früheren Paragraphen gefunden werden können. Berechnet man dann die Momente in Bezug auf mehrere Ebenen oder Linien, so können die Abstände des Schwerpuncts von denselben gefunden werden.

Wäre z. B. der Schwerpunct einer beliebigen ebenen Fläche **CbDa** (Fig. 80) zu suchen, und nimmt man in der Ebene derselben eine Linie **AB** an, rechtwinkelig zu den Parallelen, welche die Figur in schmale Streifen zerschneiden, so wird man diese ihrer geringen Breite wegen ohne bedeutenden Fehler als Rechtecke betrachten können, deren Schwerpuncte in der Mitte liegen. Bezeichnen daher $a, a_1, a_2 \ldots$ die Inhalte der auf einander folgenden Streifen, $h, h_1, h_2 \ldots$ die Entfernungen ihrer Schwerpuncte von **AB**, so ist

$$ah + a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots\ldots$$

die Summe der Momente dieser Streifen in Bezug auf diese Linie. Hat man nun noch den Inhalt **A** der ganzen Fläche mit Hülfe der Methode von Simpson gefunden, und bedeutet **H** die Entfernung des Schwerpuncts von **AB**, so ist das Moment der Fläche **CbDa** auch **A . H.** Nach der Lehre von den Momenten muß aber

$$A \cdot H = ah + a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots$$

sein, woraus die Entfernung des Schwerpuncts von der Axe **AB**

$$H = \frac{ah + a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots}{A}$$

folgt. Wiederholt man das Verfahren in Bezug auf eine andere Linie **BC**, so erhält man auch die Entfernung des Schwerpuncts von dieser.

Bei Rotations-Körpern und Flächen liegt der Schwerpunct in der Axe, um welche die Drehung vor sich ging, weil sie die Symmetrieaxe ist; es bleibt daher nur noch übrig, aus den Momenten in Bezug auf eine andere Linie die Entfernung des Schwerpuncts von dieser zu bestimmen. Wählt man sie so, daß sie die Symmetrieaxe rechtwinkelig schneidet, so liegt in dieser letztern der Schwerpunct in dem berechneten Abstande von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte beider Axen.

41. Anwendung der Lehre vom Schwerpuncte auf die Inhaltsbestimmung gewisser Flächen und Körper. — Eine ebenso interessante als nützliche Anwendung der Sätze vom Schwerpuncte ist das durch Guldin bekannt gemachte baryeentrische Verfahren zur Berechnung der Oberflächen und Rauminhalte solcher Körper, welche sich als durch die Bewegung einer Fläche entstanden erklären lassen. Es setzt uns in den Stand, manche räumliche Größen, die wir auf dem gewöhnlichen geometrischen Wege nur mit Schwierigkeit würden messen können, auf eine einfache Weise zu berechnen.

Ist **CDE** (Fig. 81) eine beliebige, etwa eine krummlinige Flächenfigur, welche sich um die unveränderliche Axe **AB**, die in derselben Ebene liegt, bis wieder in ihre erste Lage dreht, und denkt man sich durch Parallelschnitte zur Drehaxe die Figur in Flächenelemente zerlegt, so beschreibt jedes derselben bei der Axendrehung einen schmalen ringförmigen Raum, welcher zum Inhalte das Product aus der erzeugenden Fläche in den mittlern Umfang des Ringes hat. Das Element **mnpq** vom Inhalte **a**, dessen mittlere Entfernung von der Axe **r** ist, gibt einen ringförmigen Körper, dessen geradlinig abgewickelte Grundfläche ein schmales Paralleltrapez von der Länge $2r\pi$ bildet. Da diese Länge nichts anderes, als eben der mittlere Umfang des Ringes ist, so wird $2r\pi . a$ dessen Inhalt sein. Stehen daher die Mittelpuncte der übrigen Flächenelemente a_1, a_2, a_3 .... um r_1, r_2, r_3 .... von der Axe ab, so werden die durch sie

entstandenen Körpertheile $2r_1\pi . a_1$, $2r_2\pi . a_2$, $2r_3\pi . a_3$ .... und der Inhalt des ganzen Volumens vom Querschnitte **CDE**

$$2\pi (ra + r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3 + ...)$$

sein. Die Producte ar, a_1r_1 u. s. f. innerhalb der Klammer können aber als Momente schwerer Flächentheile a, a_1.... in Bezug auf die Linie **AB** betrachtet werden, so daß ihre Summe auch dem Momente der ganzen Fäche, d. h. dem Producte **A . R** aus dem Inhalte **A** derselben in den Abstand **R** ihres Schwerpuncts von der Axe, gleich ist. Setzen wir daher **A . R** an die Stelle jener Momentensumme, so erhalten wir für das Volumen des durch die Axendrehung der Fläche **CDE** entstandenen Körpers den Ausdruck

$$2\pi R . A.$$

Der Inhalt eines solchen Körpers ist folglich das Product aus der erzeugenden Fläche in die Kreisperipherie, welche ihr Schwerpunct durchläuft. Macht dieselbe jedoch nur einen Theil einer ganzen Umdrehung, so wird natürlich auch der Inhalt des entstandenen Körpers nur der gleichnamige Theil des ganzen Rotationskörpers sein können, ein Theil, welcher überhaupt durch das Product aus der bewegten Fläche in den Weg ihres Schwerpuncts ausgedrückt ist.

Die nämlichen Betrachtungen, auf die Drehung irgend einer Linie und ihrer Elemente um eine Axe angewendet, geben für den Inhalt der dadurch entstandenen krummen Fläche ebenfalls das Product aus der Länge der gedrehten Linie in den Weg ihres Schwerpuncts.

Für spiralförmig gewundene Körper, wie Schraubengewinde, Wendeltreppen u. dergl. läßt sich gleichfalls auf diesem Wege der Rauminhalt bestimmen, sofern nur der Querschnitt dieser Körper rechtwinkelig gegen die Linie, welche dessen Schwerpunct beschreibt, an allen Stellen derselbe ist. Jeder zwischen zwei unendlich nahe liegenden constanten Profilen befindliche Theil eines solchen Körpers kann nämlich als ein sehr schmaler Rotationskörper betrachtet werden, durch Drehung der erzeugenden Fläche um den gemeinschaftlichen Durchschnitt derselben entstanden. Alle die kleinen

Wege, welche ihr Schwerpunct gemacht hat, d. h. der ganze Weg desselben, multiplizirt mit der gedrehten Fläche, geben dann auch zum Producte das gesuchte Volumen.

Wird z. B. der Inhalt eines Schraubengewindes (Fig. 82) gesucht, so hat man zuerst den Querschnitt desselben senkrecht gegen die von seinem Schwerpuncte durchlaufene Schraubenlinie zu ermitteln und diesen alsdann mit der Länge der letztern zu multipliziren.

Die Schuttmassen auszustechender Gräben und Kanäle sind gewöhnlich Volumina von constantem Querschnitte und lassen sich daher durch das Product desselben in den Weg seines Schwerpuncts finden.

42. Benutzung der Guldin'schen Regel zur Bestimmung der Schwerpuncte von ebenen Flächen und von Linien. — Wenn wir die Inhalte von Rotationskörpern oder Flächen aus einfachen geometrischen Sätzen bereits kennen, so wird uns die Methode von Guldin umgekehrt in den Stand setzen, die Lage der Schwerpunete für diejenigen ebenen Flächen und Linien zu bestimmen, durch deren Drehung jene entstanden sind. Wir wissen z. B., daß der Inhalt einer Halbkugel vom Radius r, welche man als das Erzeugniß einer halben Umdrehung des Halbkreises $\frac{r^2\pi}{2}$ um seinen Durchmesser betrachten kann, $\frac{2}{3}r^3\pi$ beträgt. Bezeichnen wir daher die Entfernung des Schwerpuncts dieser Fläche von der Drehaxe mit R, so ist $R\pi$ die halbe Kreisperipherie, welche der Schwerpunct durchläuft, und $\frac{r^2\pi}{2} \cdot R\pi$ ebenfalls das Volumen der Halbkugel. Es folgt demnach aus $\frac{r^2\pi}{2} \cdot R\pi = \frac{2}{3}r^3\pi$, daß $\frac{R}{r} = \frac{4}{3\pi}$, d. h. daß für die Halbkreisfläche der Schwerpunct in einer Entfernung vom Durchmesser liegen muß, die sich zum Radius wie $4 : 3\pi$ verhält, und zwar in demjenigen Halbmesser, welcher als Symmetrieaxe die Fläche halbirt.

Der Schwerpunct eines Kreisbogens **CDE** (Fig. 83) ist zunächst in der denselben halbirenden Linie **DM** zu suchen. Wird dieser Kreisbogen um die Axe **AB** durch den zugehörigen Mittelpunct **M** gedreht, so beschreibt er eine Kugelzone, welche bekanntlich mit dem Mantel eines die Zone umschließenden Cylinders einerlei Inhalt hat. Ist daher die Sehne $\mathbf{EC} = s$, $\mathbf{MD} = r$ und $\mathbf{MS} = \mathbf{R}$ die Entfernung des Schwerpuncts von der Drehaxe, so ist der Inhalt der Kugelzone einmal $2r\pi . s$, das andremal $2R\pi . \mathbf{CDE}$, und es folgt hieraus $\frac{R}{r} = \frac{s}{\mathbf{CDE}}$, d. h. für den Kreisbogen verhält sich der Abstand des Schwerpuncts vom Mittelpuncte zum Radius, wie die Sehne zum Bogen. Für die halbe Kreisperipherie ist $s = 2r$ und $\mathbf{CDE} = r\pi$, mithin $\frac{R}{r} = \frac{2}{\pi}$ und R ungefähr $\frac{7}{11}$ vom Radius.

IV.

Progressive Bewegung eines Körpers oder eines Systems von Körpern. — Mechanische Arbeit der Schwere bei einer solchen Bewegung. — Verschiedene Arten des Gleichgewichts.

43. Trägheit eines Körpers oder eines Systems von Körpern bei progressiver Bewegung. — Wir nennen die Bewegung eines Körpers oder mehrerer zu einem Systeme verbundener Körper progressiv, wenn alle Puncte des erstern oder alle Theile des letztern zugleich und in einer sehr kleinen Zeit gleiche und parallele Wege beschreiben.

Wenn früher von der Kraft der Trägheit eines Körpers die Rede war, so haben wir uns denselben immer als materiellen Punct gedacht, und für einen solchen ist nach §. 71 d. I. Abth. $f = \frac{pv}{gt}$ die Kraft der Trägheit, sofern p sein Gewicht und v der Geschwindigkeitsgrad ist, welcher ihm in der kleinen Zeit t durch eine bewegende Kraft ertheilt wird. Theilen nun alle Puncte eines Körpers oder alle zu einem Systeme gehörigen Körper die nämliche Bewegung, d. h. ist der ganze Körper oder die ganze Verbindung in progressiver Bewegung, und bezeichnen p, p′, p″ … ihre Gewichte, so werden auch die Kräfte der Trägheit aller Elemente durch $f = \frac{pv}{gt}$, $f' = \frac{p'v}{gt}$, $f'' = \frac{p''v}{gt}$ …. ge-

messen. Wie aber die Bewegungsrichtungen aller Körpertheile parallel sind, so werden es auch die eben gefundenen Kräfte sein müssen, und die Trägheit F der ganzen Körperverbindung oder die Mittelkraft aus allen wird ihrer Summe $f + f' + f'' + \ldots$ gleich sein.

Es ist daher

$$F = \frac{v}{t}\left(\frac{p + p' + p'' + \ldots}{g}\right)$$

und wenn P das ganze Gewicht, M die ganze Masse bezeichnet, also $\frac{p + p' + p'' + \ldots}{g} = \frac{P}{g} = M$ ist:

$$F = \frac{Pv}{gt} = \frac{Mv}{t}.$$

Die ganze Kraft der Trägheit eines mit sich selbst parallel bewegten Körpers oder Systems von Körpern wird daher durch das Product der Masse desselben in das Verhältniß des, in einer unendlich kleinen Zeit ertheilten, Geschwindigkeitsgrades zu dieser Zeit gemessen.

Was den Angriffspunct dieser Kraft anlangt, so dürfen wir nur bedenken, daß die Kräfte der Trägheit F, f, f', f'' .... den zu ihnen gehörigen Gewichten P, p, p', p'' ... proportional sind, um sogleich zu finden, daß er mit dem Mittelpuncte der Schwerkräfte p, p', p'' .... derselbe, also der Schwerpunct des Körpers oder Systems selbst ist. Von diesem Gesichtspuncte aus haben Euler und andere Schriftsteller auch den Schwerpunct als Mittelpunct der Trägheit bezeichnet. Beide Puncte fallen nur dann in einen einzigen zusammen, wenn die Bewegungen, wie hier vorausgesetzt wurde, parallel sind.

44. Ganze Bewegungsgröße eines Körpers.

— Drückt V die für einen beliebigen Augenblick als gleichförmig angenommene Geschwindigkeit eines parallel mit sich selbst bewegten Körpers aus, und gelten die übrigen Bezeichnungen des vorigen Paragraphen, so sind nach §. 69

der I. Abtheilung die Bewegungsgrößen der Theile des Körpers oder Systems durch $\frac{pV}{g}, \frac{p'V}{g}, \frac{p''V}{g}$ ausgedrückt.

Die ganze Bewegungsgröße wird daher auch der Summe aller der einzelnen parallel gerichteten Bewegungsgrößen $\frac{(p+p'+p''+\ldots)}{g}V$ oder, da $\frac{p+p'+p''+\ldots}{g}$ wieder die Masse **M** ist, **MV** sein, d. h. gleich der Masse des Körpers oder Systems, multiplicirt mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit aller seiner Puncte oder Theile.

45. Bewegung eines Körpers, wenn die Richtung der bewegenden Kraft durch den Schwerpunct geht. — Wir haben aus §. 42 gesehen, wie sich die Kraft der Trägheit eines Körpers von der Masse **M**, dessen Puncten in dem Zeitelemente **t** ein Geschwindigkeitsgrad **v** ertheilt wird, durch $F = \frac{Mv}{t}$ ausdrücken läßt, und wie diese Kraft parallel mit der gemeinschaftlichen Bewegungsrichtung und im Schwerpuncte des Körpers wirkt. Denkt man sich nun in dem Augenblicke, wo die Geschwindigkeit sich zu verändern anfängt, eine der Bewegungsrichtung entgegengesetzte und mit **F** gleiche Kraft im Schwerpuncte angebracht, so wird diese die Bewegung verhindern. Es wird demnach eine im Schwerpuncte des Körpers angreifende bewegende Kraft **X** demselben eine Bewegung mittheilen, bei welcher alle Theile parallele und gleiche Wege beschreiben, weil diese Kraft der ganzen Trägheit **F**, welche sie hervorrief, gleich und entgegengesetzt gerichtet ist. So viele Theile der Körper hat, in so viele kleine Kräfte **f, f', f''...** wird sich die Kraft **F** zerlegen, welche alle den Massen dieser Theile proportional sind. Sind daher **m, m', m''....** diese Massen, so werden nach §. 71 der I. Abth. die Geschwindigkeitsgrade, welche ihnen durch jene

Kräfte ertheilt werden, $\frac{ft}{m}$, $\frac{f't}{m'}$, $\frac{f''t}{m''}$ .... und, wenn man von den Proportionen $\frac{f}{F} = \frac{m}{M}$, $\frac{f'}{F} = \frac{m'}{M}$, $\frac{f''}{F} = \frac{m''}{M}$.... Gebrauch macht, $\frac{Ft}{M}$ betragen. Da dies auch der Geschwindigkeitsgrad ist, welcher der auf den Schwerpunct wirkenden Kraft **F** oder der ihr gleichen Kraft **X** entspricht, so erkennt man, daß eine bewegende Kraft oder die Resultante bewegender Kräfte durch den Schwerpunct des Körpers gehen muß, um ihn in eine progressive Bewegung zu versetzen.

46. Bewegung eines Körpers, wenn die Richtung der bewegenden Kraft nicht durch den Schwerpunct geht. — Ist die bewegende Kraft **X** wie die Linie **AB** (Fig. 84) gerichtet, welche neben dem Schwerpuncte **G** vorbei geht, so wird, wie man leicht einsieht, die Bewegung, welche sie hervorbringt, keine blos progressive mehr sein können. Denn angenommen, die Bewegung wäre in allen Puncten des Körpers parallel, so würden dadurch Trägheitskräfte in denselben hervorgerufen, deren Resultante nur durch den Schwerpunct gehen könnte, und eine ihr entgegengesetzteund im Schwerpuncte angreifende Kraft müßte die Bewegung aufheben und Gleichgewicht zu Stande bringen. Daß aber zwei Kräfte **F** und **X** wie die Linien **FG** und **AX** an den Enden einer Geraden **AG** sich nicht aufheben können, wofern sie nicht in der Richtung dieser Geraden selbst wirken, ist klar. Die Bewegung, welche ein Körper annimmt, wenn auf irgend eine Weise Kräfte auf ihn wirken, ist überhaupt aus einer allen Puncten gemeinschaftlichen und fortschreitenden, und aus einer Drehbewegung um den Schwerpunct zusammengesetzt. Die Bewegung des Schwerpuncts ist dabei so, als ob alle diese Kräfte parallel mit sich selbst

an ihm angebracht wären *). Mit Hülfe dessen, was über die Zusammensetzung der Kräfte gesagt wurde, kann daher

---

*) Denkt man sich die Masse M eines auf irgend eine Weise bewegten Körpers in die Theile m, m_1, m_2... zerlegt und sind x, y, z....., x_1, y_1, z_1...., x_2, y_2, z_2.... die Abstände dieser Elemente von einer beliebigen Momentenebene zu Anfang und zu Ende zweier aufeinanderfolgender Zeitelemente, so ist nach der Lehre von den Momenten

$$mx + m_1y + m_2z + \ldots = Ma \quad \ldots. (1)$$
$$mx_1 + m_1y_1 + m_2z_1 + \ldots = Ma_1 \ldots. (2)$$
$$mx_2 + m_1y_2 + m_2z_2 + \ldots = Ma_2 \ldots. (3)$$

wobei a, a_1, a_2 die Abstände des Schwerpuncts des ganzen Körpers von der Ebene sind. Subtrahirt man (1) von (2) und (2) von (3) und setzt

$x_1 - x = s$, $y - y = s_1$, $z_1 - z = s_2$, ... $a_1 - a = S$
$x_2 - x_1 = w$, $y_2 - y_1 = w_1$, $z_2 - z_1 = w_2$, ... $a_2 - a_1 = W$

so erhält man daraus die neuen Gleichungen

$$ms + m_1s_1 + m_2s_2 + \ldots = MS$$
$$mw + m_1w_1 + m_2w_2 + \ldots = MW$$

und aus beiden wieder durch Subtraction

$$m(w-s) + m_1(w_1-s_1) + m_2(w_2-s_2) + \ldots = M(W-S) \ldots. (4).$$

Nun sind aber $a_1 - a = S$, $x_1 - x = s$ u. s. f. nichts anderes, als die Wege, welche in dem ersten, dagegen $a_2 - a_1 = W$, $x_2 - x_1 = w$ u. s. f. die, welche in dem zweiten Zeitelemente, auf eine zur Momentenebene winkelrechte Linie bezogen, sowohl vom Schwerpuncte des ganzen Körpers, als auch von den einzelnen Körpertheilen, zurückgelegt werden.

Wegen der Kleinheit der Zeitelemente können diese Wege als gleichförmig durchlaufene betrachtet werden, so daß wenn C, c, c_1, c_2.... die Geschwindigkeiten während des ersten und V, v, v_1, v_2... die während des zweiten Zeitelementes sind,

$Ct = S$, $ct = s$, $c_1t = s_1$, $c_2t = s_2$ ...
$Vt = W$, $vt = w$, $v_1t = w_1$, $v_2t = w_2$... oder auch
$W - S = (V - C)t$, $w - s = (v - c)t$, $w_1 - s_1 = (v_1 - c_1)t$,

die Bewegung des Schwerpuncts, welche zu kennen, vor Allem wichtig ist, ausgemittelt werden; denn ist X die Re-

---

$w_2 - s_2 = (v_2 - c_2)\,t \ldots$ ist und die Gleichung (4) hierdurch in

$(V - C)\,M = (v - c)\,m + (v_1 - c_1)\,m_1 + (v_2 - c_2)\,m_2 + \ldots$

verwandelt wird.

Die Unterschiede $V - C$, $v - c$ u. s. f. sind die Geschwindigkeitsdifferenzen des Schwerpuncts und der Körperelemente zu Anfang und zu Ende des ersten Zeittheilchens, sie sind daher die ihnen ertheilten Geschwindigkeitsgrade, und die Glieder der vorigen Gleichung sind die Bewegungsgrößen in Bezug auf die Vertikale zur Momentenebene.

Wie wir aus §. 71 d. I. Abth. wissen, können die Bewegungsgrößen der Kräfte auch durch die Producte aus diesen Kräften in das Zeitelement ausgedrückt werden. Sind daher f, f_1, $f_2 \ldots$ die auf die Bewegungsrichtung bezogenen Theile der bewegenden Kräfte, so sind ft, $f_1 t$, $f_2 t \ldots$ die Bewegungsgrößen und $(f + f_1 + f_2 + \ldots)\,t$ ihre ganze Bewegungsgröße, welche der aus der Bewegung selbst abgeleiteten gleich sein muß. Dies gibt, wenn man die Mittelkraft der Kräfte f, f_1, f_2 ꝛc. mit F bezeichnet,

$(V - C)\,M = Ft$ und den dem Schwerpuncte ertheilten Geschwindigkeitsgrad in der vertikalen Richtung zur Momentenebene $V - C = \frac{Ft}{M}$.

Griffen alle die in beliebigen Richtungen wirkenden Kräfte, statt in verschiedenen Puncten, im Schwerpuncte an, so würde ihre Mittelkraft, auf die Bewegungsrichtung bezogen, eben die obige Kraft F zur Componente geben und $\frac{Ft}{M}$ der dem Schwerpuncte des Körpers ertheilte Geschwindigkeitsgrad sein. Es ist mithin für die Bewegung des Schwerpuncts nach einer Richtung hin gleichgültig, ob die Kräfte im Schwerpuncte selbst oder außerhalb desselben angreifen. Auch in Bezug auf andere Richtungen läßt sich auf ganz gleiche Weise dasselbe zeigen

sultante aller auf den Schwerpunct parallel mit sich selbst übertragener Kräfte und F die ganze Trägheit des Körpers, so ist

$$X = F = \frac{Mv}{t}$$

und der in irgend einem Augenblicke und im Zeitelemente t ertheilte Geschwindigkeitsgrad

$$v = \frac{Xt}{M}.$$

Aus dieser Größe läßt sich nun sowohl die Geschwindigkeit, als auch der durchlaufene Raum am Ende irgend einer Zeit bestimmen.

47. Ganze lebendige Kraft eines parallel mit sich selbst bewegten Körpers. — Wie die Trägheit und die Bewegungsgröße eines Körpers, dessen Theile gleiche und parallele Wege machen, ebenso gefunden wurde, als ob die ganze Masse des Körpers in einem Puncte concentrirt wäre, so wird auch die lebendige Kraft durch das Product aus der Masse M des Körpers in das Quadrat der Geschwindigkeit V aller Theile ausgedrückt werden. Denn sind $p, p_1, p_2 \ldots$ die Gewichte dieser Theile, so sind die zu ihnen gehörigen lebendigen Kräfte $\frac{p}{g} \cdot V^2, \frac{p_1}{g} \cdot V^2, \frac{p_2}{g} \cdot V^2 \ldots$ und, da sie alle parallel gerichtet sind, so ist auch

$$\frac{(p + p_1 + p_2 + \ldots)}{g} \cdot V^2 = MV^2$$

ihre Resultante oder die ganze lebendige Kraft. Wir haben daher, wenn wir früher die lebendige Kraft eines Fuhrwerks durch die Masse desselben im Ganzen ausdrückten, statt die

---

und es erfolgt demnach die Bewegung des Schwerpuncts so, als ob die Kräfte, jede in ihrer Richtung, in ihm selbst angebracht wären.

lebendigen Kräfte der Theile, der Räder, Axen, des Kastens u. s. f. einzeln zu berechnen, eine erlaubte Vereinfachung vorgenommen. Ueberhaupt wird es nach den in diesem und in den vorigen Paragraphen angestellten Untersuchungen gestattet sein, bei der progressiven Bewegung eines Körpers oder Körpersystems von der äußern Form der Körper ganz zu abstrahiren, seine Masse im Schwerpunct vereinigt zu denken und die Betrachtungen über die ganze Masse so anzustellen, wie über den Schwerpunct allein.

48. Allgemeiner Lehrsatz über die Arbeit der Schwere. — Nachdem wir gezeigt haben, daß bei progressiver Bewegung die Masse eines Körpers als im Schwerpuncte zusammengehäuft betrachtet werden darf, können wir auch darthun, daß diese Betrachtungsweise nicht statthaft ist, wenn die Theile des Körpers verschiedene Bewegungen haben, d. h., wenn zugleich Drehung stattfindet. Denn ist dies der Fall, so können die Kräfte der Trägheit dieser Theile nicht mehr parallel und ihre Resultante, die ganze Trägheit kann nicht mehr ihrer Summe gleich sein. Die nicht parallelen Kräfte der Trägheit werden daher auch einen andern Angriffspunct der Mittelkraft haben, als wenn sie parallel wären; denn da sie proportional sind den Gewichten der Körpertheile, so würden sie parallel sein müssen, um den Angriffspunct ihrer Mittelkraft im Schwerpuncte zu haben. Kommt es aber darauf an, die Arbeit der Schwere bei einer solchen Bewegung zu ermitteln, so darf man, weil die durch die Schwerkräfte auf die Körpertheile ausgeübten Wirkungen stets parallel und vertikal sind und ihre Resultante, wie das ganze Gewicht des Körpers selbstbeständig durch den Schwerpunct geht, von der Umdrehungsbewegung aller der ausserhalb des Schwerpuncts liegenden Theile ganz absehen und die Bewegung des Schwerpuncts so beurtheilen, als ob in ihm die ganze Masse des Körpers concentrirt wäre. Man wird daher die durch die Schwere aufgewendete Arbeitsgröße durch das Product aus dem ganzen Gewichte in den vom Schwerpuncte in vertikaler Rich-

tung durchlaufenen Weg messen. Wäre z. B. der Schwerpunct eines Körpers durch irgend eine krummlinige Bewegung von G nach G' gekommen, so gibt das Product des Gewichts **P** (Fig. 85) dieses Körpers in die vertikale Höhe **G'R**, um welche sein Schwerpunct gestiegen ist, die Arbeitsgröße an, welche ihn aus einer Lage in die andere brachte. Wie für einen einzelnen Körper, so gilt dies auch für die Gesammtheit mehrerer untereinander verbundener Körper, für Maschinen, welche aus Theilen, wie Räder, Hebel u. s. w. zusammengesetzt sind. Die Arbeitsgrößen der Schwere der einzelnen Theile geben zur Summe die auf den Schwerpunct des ganzen Systems gewendete Arbeitsgröße. Sind also $p, p_1, p_2 \ldots$ die Gewichte der verschiedenen Stücke, $h, h_1, h_2 \ldots$ die Höhen, um welche ihre Schwerpuncte auf- oder niedergestiegen sind, ist **P** das Gewicht der ganzen Körperverbindung und z der auf die Vertikale bezogene Weg ihres Schwerpuncts auf- oder abwärts, so erhält man die Gleichung

$$Pz = ph + p_1h_1 + p_2h_2 + \ldots$$

in welcher man die Arbeitsgrößen für aufsteigende Bewegung als positiv und die für niedergehende als negativ zu nehmen hat. Dieses Ergebniß, aus dem Satze §. 25 der II. Abtheilung abgeleitet, daß die Arbeitsgröße der Mittelkraft paralleler Kräfte der Summe der Arbeitsgrößen der Componenten gleich ist, wenn darunter der Unterschied der nach der entgegengesetzten Seite gerichteten Arbeitsgrößen verstanden wird, läßt sich auch auf direktem Wege finden. Bezieht man nämlich die Schwerpuncte der verschiedenen Körper in jeder Stellung auf eine und dieselbe Horizontalebene **AB** (Fig. 86) und bezeichnet ihre Abstände von dieser Ebene einmal durch $H, H_1, H_2 \ldots$, das andremal durch H', H_1', H_2', das Gewicht des Ganzen durch **P** und die Abstände seines Schwerpuncts von der Horizontalebene durch **Z** und **Z'**, so ist nach der Lehre von den Momenten

$$PZ = pH + p_1H_1 + p_2H_2 + \ldots$$
$$PZ' = pH' + p_1H_1' + p_2H_2' + \ldots$$

und, wenn man Glied für Glied in beiden Gleichungen subtrahirt,

$$P(Z'-Z) = p(H'-H) + p_1(H_1'-H_1) + p_2 H_2'-H_2) + \ldots$$

Liegen sämmtliche Puncte über der Ebene **AB**, so ist $Z' - Z$ die Höhe z, um welche der Schwerpunct des Ganzen gestiegen oder gesunken ist, je nachdem Z' größer oder kleiner als Z; ebenso entsprechen die Differenzen $H'-H$, $H_1'-H_1$, $H_2'-H_2$... den Größen h, h_1, h_2... und sind dabei positiv oder negativ, je nachdem die Bewegung der zugehörigen Schwerpuncte auf- oder niederwärts erfolgt ist. Die Größen $P(Z'-Z)$, $p(H'-H)$, $p_1(H_1'-H_1)$, $p_2(H_2'-H_2)$... mit PZ, ph, p_1h_1, p_2h_2.... gleichbedeutend, sind also die Producte aus den Kräften in die nach ihren Richtungen durchlaufenen Wege oder die Arbeitsgrößen. Es ist daher die ganze, der Schwere entsprechende, Arbeitsgröße eines in Bewegung befindlichen Systems gleich der Summe der Arbeitsgrößen der steigenden Theile, vermindert um die der herabsinkenden.

49. Gleichgewicht schwerer Körper. — Bleibt der Schwerpunct eines Systems von schweren Körpern, beim Uebergange desselben aus einer Stellung in eine andere, in derselben Horizontalebene, ist also $Z' = Z$, so wird das Product $P(Z'-Z)$ der Null gleich, und

$$ph + p_1h_1 + p_2h_2 + \ldots = 0$$

Zur Bewegung des Systems ist alsdann keine Arbeitsgröße nöthig, indem die Arbeitsgrößen der Schwere für die einzelnen Theile des Systems sich gegenseitig aufheben. Es ist dann die Bedingung des Gleichgewichts für Körper, auf welche nur die Schwerkraft wirkt, erfüllt und das System im Gleichgewichte. Verschiedene Stellungen des Systems lassen aber verschiedene Zustände des Gleichgewichts zu. Sinkt der Schwerpunct, wenn das System etwas aus der Lage des Gleichgewichts gebracht wird, so wird es das Bestreben haben, sich immer mehr aus derselben zu entfernen,

und es wird eine Arbeitsgröße erforderlich sein, um es wieder in dieselbe zurückzuführen. In diesem Falle heißt das Gleichgewicht nicht stabil oder augenblicklich. Wenn dagegen der Schwerpunct steigt, indem man das Gleichgewicht stört, so wird die Schwere eine gewisse Arbeitsgröße, welche aufgewendet wurde, um das System aus seiner Lage zu bringen, wieder zu erstatten suchen. Das System hat das Bestreben, in seine vorige Lage zurückzukehren, wenn es sich selbst überlassen wird, und diesen Zustand des Gleichgewichts nennt man das stabile oder dauernde Gleichgewicht. Erfolgt endlich weder ein Steigen noch ein Sinken des Schwerpuncts durch Ablenkung des Systems, so sucht es weder in seine erste Lage zurückzukehren, noch auch sich mehr und mehr davon zu entfernen; die aufgewendete Arbeitsgröße ist beständig Null und das Gleichgewicht heißt indifferent.

50. Beispiele für die verschiedenen Arten des Gleichgewichts. — Eine einfache pendelförmige Vorrichtung dient, um das stabile und nicht stabile Gleichgewicht anschaulich zu machen, nämlich eine Stange, die sich bei **A** (Fig. 87) um eine Axe drehen kann, und am andern Ende mit einem Körper versehen ist, welcher in Bezug auf eine durch den Schwerpunct **G** des Ganzen und durch die Drehaxe gehende Gerade symmetrisch ist. Befindet sich die Stange in der vertikalen Stellung **AG**, so ist offenbar Gleichgewicht vorhanden und dieses Gleichgewicht ist stabil; denn bringt man das Ganze aus seiner Lage **AG** nach **AG'**, so steigt der Schwerpunct **G**, indem er den Bogen **GG'** beschreibt, nach **G'** und es ist dazu ein Aufwand von Arbeit erforderlich, welchen die Schwere restituiren wird, wenn man die Stange wieder sich selbst überläßt. Man sieht dann die Vorrichtung um **AG** schwingen und sowohl bei jeder Schwingung einmal als auch nach und nach ganz in die ursprüngliche Lage zurückkehren. Bringt man den Körper in die entgegengesetzte Lage (Fig. 88), so daß die Linie durch den Schwerpunct und die Drehaxe wiederum ganz

vertikal ist, so nimmt der Stützpunct die Resultante aller Schwerkräfte auf, und wenn keine andere Kraft wirkt, so fehlt es an einer Ursache, durch welche das System zur Seite abgelenkt wird. Es findet daher ebenfalls Gleichgewicht statt, allein die geringste störende Kraft reicht hin, es aufzuheben und den Schwerpunct sinken zu lassen. Um ihn wieder nach G zurückzuführen, ist aber eine gewisse Arbeitsgröße nöthig und daher das Gleichgewicht in dieser Lage nicht stabil.

Wenn man einen geraden Kegel (Fig. 89), der auf seiner Grundfläche steht, etwas neigt, so beschreibt sein Schwerpunct einen Bogen und erhebt sich; sich dann selbst überlassen, kehrt der Kegel in seine frühere Lage zurück. Stellt man ihn dagegen auf die Spitze, so daß die Vertikale durch dieselbe auch durch den Schwerpunct geht, so ist die geringste Bewegung im Stande, ihn aus der Gleichgewichtslage zu bringen, in die er von selbst nicht wieder zurückgeht. Beide Stellungen des Kegels gewähren Gleichgewicht, die erste stabiles, die andere nichtstabiles.

Ein Cylinder (Fig. 90) mit elliptischer Basis befindet sich auf einer Horizontalebene im Zustande des stabilen oder nicht stabilen Gleichgewichts, je nachdem die große oder kleine Axe der Ellipse dieser Ebene parallel ist.

Eine Kugel, welche auf einer Horizontalebene fortrollt, vergegenwärtigt indifferentes Gleichgewicht, denn ihr Schwerpunct bleibt immer in gleicher Höhe über der Ebene und die Arbeitsgröße, welche die Bewegung erfordert, ist beständig Null. Ganz so verhält es sich auch mit einem Kreiscylinder, welcher mit seinem Mantel die Horizontalebene berührt.

Zugbrücken sind nichts als Systeme von Körpern im Zustande des indifferenten Gleichgewichts, zu deren Bewegung, wenn man von den Widerständen der Reibung absieht, keine mechanische Arbeit nöthig ist, die also in jeder Lage im Gleichgewichte sind. Es muß daher die Anordnung des Flügels oder der eigentlichen Brücke AB und des Schnell-

balkens **CD** (Fig. 91) so getroffen sein, daß ihr gemeinschaftlicher Schwerpunct in allen möglichen Lagen, welche diese Theile zu einander annehmen können, immer in einer und derselben Horizontalebene bleibt.

Fuhrwerke, auf horizontalem Wege fahrend, nehmen keine andere Arbeitsgröße in Anspruch, als die, welche zur Ueberwindung der unvermeidlichen Widerstände nöthig ist, ihr Schwerpunct wird daher weder steigen noch sinken.

Wasserräder, welche nicht gehörig centrirt sind, bei welchen der Schwerpunct **G** (Fig. 92) außerhalb des Zapfenmittels liegt, bewegen sich während eines Umlaufs bald langsamer, bald schneller. Bei solchen Rädern wechselt stabiles mit nicht stabilem Gleichgewichte, ähnlich wie bei Fig. 87 und 88. Im Anfange, wenn der Schwerpunct die tiefste Lage einnimmt, ist das Gleichgewicht stabil, dann steigt der Schwerpunct und entfernt sich mehr und mehr von der Vertikalen **AB**, so daß die Schwere die Geschwindigkeit des Rades allmählig vermindert. Im höchsten Puncte angekommen, gelangt der Schwerpunct in eine neue Lage des Gleichgewichts, aber in die des nicht stabilen; denn von da an beschleunigt die Schwere die Geschwindigkeit des Rades, bis der Schwerpunct wieder in die anfängliche tiefste Stellung gekommen ist, in welcher auch die Geschwindigkeit wieder ihren ersten Werth annimmt.

Die gewöhnliche Gewichtswage besteht hauptsächlich in einem Wagebalken mit gleichen Armen **AC** und **BC** (Fig. 93), dessen beide Enden an Schnüren oder Ketten zwei gleiche Wagschalen, die eine für den zu wiegenden Körper, die andre für das Gewicht, tragen. Der Balken ruht mit einem dreikantigen Zapfen in Oeffnungen, welche sich in den beiden Schenkeln der sogenannten Schere befinden, die bei **E** aufgehängt ist. Eine Wage ist richtig angeordnet, wenn sie, aus ihrer horizontalen Lage gebracht, bei gleicher Belastung immer das Bestreben hat, in dieselbe zurückzukehren, d. h. einzuspielen. Sie wird aber fehlerhaft angeordnet sein, wenn sie statt dessen sich immer

mehr und mehr von der horizontalen Lage zu entfernen strebt oder auch, wenn sie in jeder beliebigen Lage im Gleichgewicht oder in Ruhe bleibt; im ersten Falle heißt sie toll, im zweiten faul. Der Schwerpunct der ganzen Wage kann nämlich unter oder über dem Drehpunct D liegen, oder er kann mit ihm zusammenfallen. Fällt er unter den Drehpunct, so ist die Wage brauchbar und das Gleichgewicht stabil; liegt er über demselben, so ist das Gleichgewicht nicht stabil und die Wage heißt toll, weil sie bei der leisesten Berührung ganz umschlägt. Je näher der Schwerpunct unter dem Stützpuncte liegt, um so geringer ist das Bestreben der Wage, im Gleichgewichte zu bleiben, um so empfindlicher ist sie. Fällt endlich der Schwerpunct in die Drehkante des Zapfens selbst, so findet indifferentes Gleichgewicht statt, die Wage heißt faul und bleibt unter der Wirkung gleicher Gewichte in jeder Lage im Gleichgewichte. Man findet die Lage des Schwerpuncts, wenn man von allen dieselbe constituirenden Theilen die Momente in Bezug auf die Horizontalebene sucht und durch das Gewicht der ganzen Wage dividirt.

V.

Gleichgewicht und Bewegung eines festen, völlig freien Körpers.

51. Gleichgewicht eines freien Körpers. — Soll ein Körper, auf welchen mehrere Kräfte wirken, im Gleichgewichte sein, d. h. sollen sich die Kräfte aufheben und den Zustand seiner Bewegung nicht ändern, so müssen diejenigen Kräfte, welche nach der einen Seite wirken, zusammengenommen eine Arbeitsgröße geben, welche der Summe der Arbeitsgrößen der nach der entgegengesetzten Seite gerichteten Kräfte gleich ist. Sind nämlich **P, Q, R, S ...** (Fig. 94) Kräfte, welche an einem festen Körper wirken, und nimmt man im Innern dieses Körpers drei Puncte **a, b, c** an, welche die Spitzen eines Dreiecks **abc** bilden, verbindet man ferner die Angriffspuncte **A, B, C, D ...** der Kräfte mit den unveränderlichen Puncten **a, b, c** und zerlegt jede derselben in Bezug auf die so erhaltenen Linien in drei Seitenkräfte, z. B. die Kraft **P** in die Kräfte p, p_1, p_2, welche in die Richtung **Aa, Ab, Ac** fallen, so erhält man eine Anzahl Kräfte, welche, da man ihre Angriffspuncte nach §. 13 der II. Abtheilung in die Puncte **a, b, c** verlegen kann, in drei Gruppen gebracht werden können. Bezeichnet nun **X** die Mittelkraft, welche die nach **a** transportirten Seitenkräfte p, q, r, s ... geben, ferner **Y** und **Z** die der Kräfte p_1, q_1, r_1, s_1 ... und p_2, q_2, r_2, s_2 ..., welche in **b** und **c** angreifen, so sind durch die drei Kräfte **X, Y, Z** die wirklich auf den Körper wirkenden Kräfte **P, Q, R, S ...** ersetzt, und es kommt nur noch darauf

an, unter welchen Verhältnissen diese drei im Gleichgewichte sind. Offenbar wird das Gleichgewicht von **X**, **Y** und **Z** nicht gestört, wenn nach einander die Dreiecksseiten **ab**, **bc**, **ac** zu festen und unverrückbaren Aren werden. Es hebt dann **ab**, als feste Linie genommen, die Wirkung der Kräfte **X** und **Y** auf, und es würde nur noch eine Drehung um **ab** möglich sein, wenn die Kraft **Z** nicht in der nämlichen Ebene mit **abc** läge; ferner werden in Bezug auf **bc** und **ac**, als feste Aren, auch **X** und **Y** in der nämlichen Ebene liegen müssen, wenn keine Drehung um eine dieser Aren erfolgen soll. Für das Gleichgewicht der drei Kräfte **X**, **Y**, **Z** in dieser Ebene ist aber erforderlich, daß jede derselben der Resultante der beiden andern gleich und entgegengesetzt sei oder daß alle drei Kräfte in einem Puncte zusammenlaufen und Null zur Mittelkraft geben. Die Arbeitsgröße einer Anzahl von Kräften ist bekanntlich der Arbeitsgröße der Mittelkraft, d. h. dem Producte aus dieser in den von ihrem Angriffspuncte zurückgelegten Weg gleich; sie kann daher für die Kräfte **X**, **Y** und **Z** nichts anderes als Null sein, weil deren Resultante Null ist. Nun besteht aber offenbar die Arbeitsgröße der Kräfte **X**, **Y** und **Z** aus denen der Kräftegruppen **p**, **q**, **r**, **s** . . ., p_1, q_1, r_1, s_1 . . . und p_2, q_2, r_2, s_2 . . . in den Puncten **a**, **b**, **c**, welche zu drei und drei vereinigt, wieder den Arbeitsgrößen der ursprünglich gegebenen Kräfte **P**, **Q**, **R**, **S** . . . . gleich sind. Diesen letztern entspricht daher die nämliche Summe der Arbeitsgrößen, wie den Kräften **X**, **Y**, **Z**, und das Gleichgewicht fester Körper besteht daher unter der Bedingung, daß die ganze Arbeitsgröße aller auf den Körper wirkender Kräfte Null ist.

52. Gleichgewicht und Bewegung der Maschinen. — Denken wir uns eine Anzahl von Rädern so verbunden durch Verzahnungen, Schnuren, Ketten oder dergleichen, daß keins derselben gedreht werden kann, ohne daß sich die übrigen mitdrehen, so wird eine Kraft, welche das erste Rad in Bewegung setzt, vom zweiten Rade eine Rückwirkung erfahren. Diese Rückwirkung äußert sich für das

zweite Rad als eine Kraft, welche dieses in Bewegung zu setzen strebt, aber wieder von Seiten des dritten Rades einen Widerstand findet, durch dessen Ueberwindung wiederum dieses in Bewegung gesetzt wird u. s. f. In dem Zustande der Räder wird aber durchaus nichts verändert, wenn man statt ihrer Verbindung untereinander sich jene Reactionskräfte an ihnen thätig vorstellt, und da nunmehr jedes Rad als ein freier Körper erscheint, so muß auch die Arbeitsgröße der Kräfte, welche die Räder in dem nämlichen Sinne zu drehen streben, genau so groß sein, wie die, welche den im entgegengesetzten Sinne wirkenden Kräften entspricht. Die Kraft, welche das erste Rad bewegt, muß gleiche Arbeitsgröße mit dem Widerstande haben, welchen es an dem nächstfolgenden findet, und wenn man so fort schließt, so ist am ersten Rade eine Arbeitsgröße erforderlich, welcher die des Widerstandes am letzten Rade gleich ist. Ueberhaupt, wenn Kräfte mit Hülfe von Maschinen Arbeit verrichten, muß ihre Arbeitsgröße stets so groß sein, wie die der Widerstände, nicht nur derjenigen, welche man zu überwinden beabsichtigt, sondern auch der Widerstände, welche durch die Zusammendrückbarkeit, Dehnbarkeit, durch gegenseitige Reibung der Körper entstehen.

Bleibt der Körper ganz in Ruhe, d. h. findet statisches Gleichgewicht statt, dann sind unter den Arbeitsgrößen diejenigen zu verstehen, welche eine geringe Bewegung des Systems hervorbringen würden. Ist dagegen das System in Bewegung und ist diese Bewegung gleichförmig, so findet dynamisches Gleichgewicht statt, und da bei dieser Bewegung die Trägheit gar nicht in's Spiel kommt, so sind die Arbeitsgrößen auch einzig nach den Bewegungen der Angriffspuncte der Kräfte zu beurtheilen, ohne daß auf die Trägheit Rücksicht genommen wird. Aendert sich dagegen die Geschwindigkeit der bewegten Körper, d. h. wird die Bewegung ungleichförmig, so muß die Trägheit, je nachdem sie die Geschwindigkeit vermehrt oder vermindert, den Kräften oder den Widerständen beigerechnet werden, d. h. es muß die Arbeit

der bewegenden Kräfte derjenigen aller Widerstände gleich sein, vermehrt um die Arbeitsgröße der Trägheit, wenn die Bewegung beschleunigt ist, oder vermindert um dieselbe, wenn sie verzögert ist.

53. Relation zwischen der Arbeit der Kräfte, welche auf einen freien Körper wirken, und ihrer lebendigen Kraft. — Jede Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung eines freien Körpers ruft Trägheit hervor und vermöge des Princips der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung muß diese mit den Kräften im Gleichgewichte sein, welche auf den Körper wirken, oder was dasselbe ist, seine Arbeitsgröße ist der Differenz der gleichzeitig nach der einen und nach der entgegengesetzten Richtung an ihm thätigen Kräfte. Nun wissen wir aber aus §. 75 der I. Abtheilung, daß die Arbeitsgröße der Trägheit bei einem Körper, welcher aus einer Geschwindigkeit in eine andere übergeht, durch die halbe Differenz der lebendigen Kräfte, welche er zu Anfang und zu Ende des betreffenden Zeitraums hatte, oder durch die Hälfte der lebendigen Kraft gemessen wird, welche gewonnen oder verloren wurde, je nachdem die Geschwindigkeit sich vermehrte oder verminderte. Es ist daher auch die Totalarbeit mehrerer Kräfte, welche während irgend eines Zeitraums auf einen Körper wirken, der Hälfte der inzwischen gewonnenen oder verlornen lebendigen Kraft gleich.

54. Beispiel. Eine Bombe vom Gewichte **P**, welche vom Puncte **A** (Fig. 95) mit der Geschwindigkeit **V** abgeht, würde, wenn die Schwere nicht auf sie wirkte, in der Richtung **AF** fortgehen, in welcher sie geworfen wird. Statt dessen wird sie (und zwar, wenn die Bewegung im luftleeren Raume vor sich geht, nur) durch die Schwerkraft beständig von dieser geradlinigen Bahn abgelenkt und gezwungen, eine krumme Linie **ABD** zu beschreiben. Wenn aber ein der Schwere unterworfener Körper irgend einen Theil einer Curve zurücklegt, so ist nach §. 10 der II. Abth.

die wegen der Schwere aufgewendete Arbeit durch das Product aus seinem Gewichte in die Verticalprojection des Curvenstücks gemessen. Die Schwerkraft wird daher während der Bewegung der Bombe von **A** nach **B** die Arbeitsgröße **P . BC** oder **P . H** in Anspruch nehmen, wenn man die Vertikale **BC** mit **H** bezeichnet. Da ferner $\frac{P}{g} \cdot V^2$ die lebendige Kraft zu Anfang und $\frac{P}{g} \cdot V_1^2$ die im Puncte **B** ist, in welchem die Bombe die Geschwindigkeit V_1 hat, so ist $\frac{P}{g} \cdot V^2 - \frac{P}{g} \cdot V_1^2$ die lebendige Kraft, welche die Bombe während ihres Laufs von **A** nach **B** verloren hat. Die Hälfte derselben muß nun gleich der von der Schwere aufgewendeten Arbeit, d. h. es muß

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g} \cdot V^2 - \frac{P}{g} \cdot V_1^2\right) = P \cdot H$$

oder

$$V^2 - V_1^2 = 2g \cdot H$$

sein. Wir sehen daraus, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten, welche der im luftleeren Raume geworfene Körper an zwei Puncten seiner Bahn besitzt, zur Differenz den Höheunterschied dieser beiden Puncte, multiplicirt mit der doppelten Geschwindigkeit g geben, welche die Schwerkraft in der ersten Secunde ertheilt. Wird $H = 0$, d. h. kommt der Körper wieder in derselben Horizontalebene an, von welcher er ausging, so wird auch $V^2 - V_1^2 = 0$ und $V = V_1$; ein im luftleeren Raume geworfener Körper kommt also genau mit der Anfangsgeschwindigkeit in das Niveau zurück, in welchem die Bewegung desselben anfing. Beziehen sich die Geschwindigkeiten **V** und V_1 auf die Puncte **F** und **E** der Bahn, welche in irgend einer Horizontalebene **EF** liegen, so ist ebenfalls der Höhenabstand derselben $H = 0$, und die Geschwindigkeit in **E** der in **F** gleich, woraus hervorgeht,

daß in gleichen Erhebungen über dem Horizont im ab-, wie im aufsteigenden Zweige der Curve **ABD** gleiche Geschwindigkeiten Statt haben. Die Betrachtungen, welche wir §. 5 der II. Abtheilung über die Unabhängigkeit gleichzeitig ertheilter Geschwindigkeiten oder §. 6 gleichzeitig wirkender Kräfte angestellt haben, bieten Mittel dar zur Verzeichnung der Wurfbahn. Wir können nämlich der Bombe zwei gleichzeitige Bewegungen, eine horizontale nach der Are **Ax** und eine vertikale nach der Are **Ay** beimessen, für welche die Anfangsgeschwindigkeiten die Seiten eines Parallelogramms sind, dessen Hypotenuse die wirkliche Anfangsgeschwindigkeit der Bombe ist. Vermöge der horizontalen Geschwindigkeit, welche durch keine Kraft verändert wird, werden in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt, in vertikaler Richtung dagegen wird die Geschwindigkeitscomponente beständig durch die Schwere in gleichen Zeitelementen um gleiche Grade vermindert, so daß sich nach §. 64 der I. Abtheilung die am Ende dieser Zeittheilchen erlangten Geschwindigkeiten oder zurückgelegten Wege leicht bestimmen lassen. Parallelen zu den Axen **Ax** und **Ay** in Abständen gezogen, welche den vom Anfangspuncte aus gleichzeitig horizontal und vertikal beschriebenen Wegen entsprechen, geben dann durch ihren Durchschnittspunct den jedesmaligen Ort der Bombe, nach und nach also die ganze Bahn derselben.

Je größer die Geschwindigkeit eines im lufterfüllten Raume geworfenen Körpers ist, um so größern Einfluß hat der Widerstand der Luft auf die Bewegung, und da es bei der Bewegung einer Bombe sich um sehr große Geschwindigkeiten handelt, so kann dieser Widerstand nicht vernachläßigt werden. Um in diesem Falle die Construction der Wurfbahn vorzunehmen, muß man eine Tabelle der Luftwiderstände für verschiedene Geschwindigkeiten und Kaliber haben. Kennt man aus derselben den der Anfangsgeschwindigkeit entsprechenden Widerstand, so kann man zuerst die horizontale und vertikale Componente desselben finden. Die eine dieser Componenten wirkt als bewegende Kraft auf die Bombe

in horizontaler Richtung und vermindert die ursprüngliche Horizontalgeschwindigkeit in jedem Zeitelemente um einen kleinen Theil, der sich leicht bestimmen läßt, ebenso wie die am Ende dieser Zeit der Bombe verbleibende Horizontalgeschwindigkeit. Die andere Componente giebt für die vertikale Richtung die aus dem Luftwiderstande entspringende bewegende Kraft, aus welcher man die Abnahme der anfänglichen Vertikalgeschwindigkeit in dem nämlichen Zeitelemente ableiten kann. Die Vertikalgeschwindigkeit der Bombe am Ende desselben läßt sich daher aus der anfänglichen und den der Schwere und dem Widerstande der Luft entsprechenden Geschwindigkeitsgraden finden. Die beiden Seitengeschwindigkeiten, welche man so erhalten hat, geben zur Resultante die Geschwindigkeit, mit welcher die Bombe ihre Bewegung im zweiten Zeitelemente beginnt und welcher wieder ein aus der Tabelle zu entnehmender Luftwiderstand entspricht. Zerlegt man den letztern, indem man von der Proportionalität zwischen den Intensitäten der Kräfte und den bereits bekannten Seitengeschwindigkeiten Gebrauch macht, in eine horizontale und vertikale Componente, so kann man wieder die kleine Zu- oder Abnahme sowohl der Horizontal- als der Vertikalgeschwindigkeit für ein Zeitelement berechnen. Durch diese gelangt man ferner zu den am Ende des zweiten Zeittheilchens erlangten und auf die Axen **Ax** und **Ay** bezogenen Geschwindigkeiten, und indem man so fortfährt, erhält man nach und nach die Geschwindigkeiten und die durchlaufenen Wege zu Ende der aufeinanderfolgenden Zeitelemente, aus welchen man die Bahn construiren kann.

VI.

Bewegung eines Körpers um eine Axe.

55. **Zur Axendrehung eines Körpers durch beliebige Kräfte tragen nur die Arbeitsgrößen derjenigen ihrer Componenten bei, welche in zur Axe normale Ebenen fallen.** — Zerlegt man die Kraft **R** (Fig. 96), welche an einem Körper wirkt, in zwei Seitenkräfte, von welchen die eine **AQ** parallel zur Axe **LM**, um welche sich der Körper dreht, die andere **AP** in einer durch den Angriffspunct **A** gehenden, gegen die Axe **LM** perpendikularen, Ebene liegt, und verfährt man ebenso mit den andern auf den Körper wirkenden Kräften, so erhält man überhaupt zwei Kräftegruppen; die eine dieser Gruppen enthält nur Kräfte parallel zur Drehaxe; die Kräfte der andern dagegen liegen alle in Ebenen, weche normal auf der Drehaxe stehen, und die Arbeitsgröße beider Gruppen ist offenbar dieselbe, wie die der gegebenen Kräfte. Alle die, welche zur Axe parallel sind, suchen eine Verrückung derselben in ihrer Richtung zu bewirken, welche aber, weil wir die Axe fest und unveränderlich angenommen haben, nicht erfolgen kann. Da also der Weg, durch welchen diese Kräfte den Körper in ihrer Richtung bewegen, Null ist, so wird auch die Arbeit derselben, das Product aus diesem Wege in die Resultante der Kräfte ebenfalls Null sein müssen. Die ganze Arbeit der wirksamen Kräfte reducirt sich daher auf die ihrer Componenten oder ihrer Projectionen gegen Ebenen, welche, normal zur Drehaxe, durch die Angriffspuncte der Kräfte gehen.

56. Mechanische Arbeit der Kräfte, welche einen Körper um eine Axe drehen. Gleichgewicht eines solchen Körpers. — In Fig. 97 bedeute **P** die auf die Vertikalebene zur Axe **LM** (Fig. 96) projicirte Kraft **R**, **C** den Punct, wo die Axe jene Ebene trifft, **A** den Angriffspunct der Kraft **P**, und **CD** ein Perpendikel von **C** auf die Richtung der Componente **AP** der Kraft **R**. Wir wissen aus §. 15 der II. Abtheilung, daß die Arbeitsgröße einer Kraft die nämliche bleibt, welcher Punct ihrer Richtung auch als ihr Angriffspunct betrachtet werden mag, können daher die Arbeitsgröße der Kraft **P** ebenso gut nach dem Wege, welchen der Punct **D** macht, schätzen, wie nach dem Wege des Punctes **A**. Beschreibt daher der Punct **D** in dem Zeitelemente **t** den Bogen **s**, so ist **P . s** die Arbeitsgröße der Kraft **P**. Man bezieht gewöhnlich den Weg jedes Punctes eines um eine Axe sich drehenden Körpers auf denjenigen, welchen ein in der Längeneinheit von derselben entfernter Punct zurücklegt oder zurücklegen würde, und da alle Puncte bei der Drehung gleiche Winkel beschreiben und ihre Bögen sich wie ihre Entfernungen von der Axe verhalten, so ist

$$s : S = CD : 1 \text{ oder } s : S = r : 1 \text{ und}$$

$$s = r \cdot S$$

wenn **r** das Perpendikel **CD** zur Kraft **P** und **S** den Bogen bezeichnet, welchen ein Punct in der Entfernung $= 1$ von der Drehaxe beschreibt. Die Arbeitsgröße der Kraft **P** kann daher auch durch $P \cdot rS$ ausgedrückt werden. Für irgend eine andere Componente P_1, welche in eine zur Axe normale Ebene fällt, und welcher das Perpendikel r_1 zugehört, wird nach demselben Vorgange die Arbeitsgröße $P_1 \cdot r_1 S$ sein. Nun wissen wir, daß die Totalarbeit gegebener Kräfte gleich ist der Summe der Arbeitsgrößen der Kräfte, welche nach der einen Seite, vermindert um die Summe der Arbeitsgrößen derjenigen, welche nach der andern Seite Drehung hervorzubringen streben. Wir können daher die

Totalarbeit der Kräfte, deren Componenten in Bezug auf eine zur Axe normale Ebene P, P_1 . . . sind

$$PrS + P_1r_1S + \ldots = (Pr + P_1r_1 + \ldots)\,S$$

setzen.

Da Pr, P_1r_1 ꝛc. die Momente der Componenten sind, so folgt daraus, daß die Totalarbeit zur Drehung eines Körpers durch das Product aus dem von der Längeneinheit beschriebenen Bogen in die Differenz der Momente gemessen wird, welche die auf Normalebenen zur Axe bezogenen Componenten geben, wenn die Summe der Momente der nach der einen Seite, um die Summe der Momente der nach der andern Seite drehenden Componenten vermindert wird. Heben sich diese beiden Momentensummen gegenseitig auf, so ist die Totalarbeit Null, und der Körper ist in Bezug auf Axendrehung unter der Wirkung der gegebenen Kräfte im Gleichgewichte.

57. Ausdehnung des Princips der lebendigen Kräfte auf die rotirende Bewegung. — Kräfte, welche einen Körper um eine Axe drehen und unter welchen nicht Gleichgewicht stattfindet, versetzen denselben in eine beschleunigte oder verzögerte Bewegung, welche in jedem Körpertheile Trägheitskräfte hervorruft. Diese Trägheitskräfte wirken in der Richtung der Bewegung und ihre Arbeitsgrößen sind zusammengenommen der Totalarbeit der bewegenden Kräfte gleich, welche diese in der nämlichen Zeit entwickelten. Für eine Bewegung, bei welcher alle Theile des Körpers gleiche Geschwindigkeit besitzen, läßt sich leicht die Arbeitsgröße der Trägheit während irgend eines Zeitraums finden, wenn man von dem Producte der ganzen bewegten Masse in die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten zu Anfang und zu Ende dieser Zeit die Hälfte nimmt. Anders ist es aber mit der Drehbewegung, bei welcher alle Körpertheile, welche nicht gleichweit von der Axe entfernt sind, verschiedene Geschwindigkeiten haben. Man muß in diesem Falle für jedes Körperelement die lebendigen Kräfte bestimmen sowohl für den Anfang des betrachteten Zeitele-

ments, als für das Ende desselben. Die Differenz ihrer Summen giebt dann den Zuwachs an lebendiger Kraft und die Hälfte davon die Arbeit der Trägheit, welche der der gegebenen Kräfte, oder vielmehr ihrer zur Axe normalen Componenten gleich ist. Es kommt demnach darauf an, ein Verfahren zu finden, durch welches die Summe der lebendigen Kräfte ausgemittelt werden kann, welche die Theile eines um eine Axe sich drehenden Körpers in einem bestimmten Augenblicke besitzen.

58. Verfahren zur Bestimmung der lebendigen Kraft eines Körpers, welcher sich um eine Axe dreht. — Ist m die Masse, p das Gewicht eines kleinen Körpertheils (Fig. 98), v seine Geschwindigkeit in irgend einem Augenblicke, r seine Entfernung von der Drehare LM, so ist die lebendige Kraft $\frac{p}{g} \cdot v^2 = mv^2$. Für andere Massentheile m_1 m_2... in den Abständen r_1, r_2..., welche in dem nämlichen Augenblicke die Geschwindigkeiten v_1, v_2... besitzen, sind $m_1v_1^2$, $m_2v_2^2$... die lebendigen Kräfte. Nach §. 56 aber sind die gleichzeitig durchlaufenen Wege rS, r_1S, r_2S... und da die Geschwindigkeit bei irgend einer Bewegung gleich ist den Quotienten aus dem kleinen in dem Zeitelemente t zurückgelegten Wege in diese Zeit selbst, so werden $\frac{rS}{t}$, $\frac{r_1S}{t}$, $\frac{r_2S}{t}$... die Geschwindigkeiten v, v_1, v_2... ausdrücken. Da S der Bogen ist, welchen bei der Drehung ein um die Längeneinheit von der Axe entfernter Punct beschreibt, so ist $\frac{S}{t}$ die Geschwindigkeit dieses Punctes, welche man gewöhnlich die Winkelgeschwindigkeit nennt und mit ω bezeichnet. Man kann daher, um die Geschwindigkeit irgend eines Punctes eines sich drehenden Körpers zu finden, die Winkelgeschwindigkeit mit den betreffenden Halbmessern multipliciren und $v = r\omega$, $v_1 = r_1\omega$, $v_2 = r_2\omega$... setzen. Es sind demzufolge

die lebendigen Kräfte der Massentheile m, m_1, m_2.... auch $mr^2\omega^2$, $m_1 r_1^2\omega^2$, $m_2 r_2^2\omega^2$.... und die Summe der sämmtlichen lebendigen Kräfte oder die ganze lebendige Kraft ist

$$\omega^2 (mr^2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots)$$

Verändert sich die Geschwindigkeit des Körpers, so ist dies auf den Ausdruck für die lebendige Kraft desselben von weiter keinem Einflusse, als daß der Factor ω^2 ein anderer wird; die innerhalb der Klammer stehende Größe bleibt dieselbe. Man nennt diese letztere, welche aus den Producten der Massentheile in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Drehaxe zusammengesetzt ist, das Trägheitsmoment, und erhält, wenn man dasselbe durch T bezeichnet, die lebendige Kraft des Körpers

$$\omega^2 . T$$

Es ist demnach die lebendige Kraft eines Körpers, der sich um eine Axe dreht, gleich dem Quadrate seiner Winkelgeschwindigkeit, multiplicirt durch sein Trägheitsmoment.

Ist in einem gewissen Zeitraume die Winkelgeschwindigkeit ω durch beschleunigte Bewegung in ω_1 übergegangen, so ist jetzt die lebendige Kraft $\omega_1^2 T$ und der Zuwachs an lebendiger Kraft in dieser Zeit $\omega_1^2 T - \omega^2 T$. Die Hälfte davon ist die Totalarbeit der gegebenen Kräfte oder derjenigen ihrer Componenten, welche in Normalebenen zur Drehaxe fallen. Nennen wir daher die Mittelkraft aller dieser Componenten F und den während des in Rede stehenden Zeitraums durchlaufenen und auf die Richtung der Mittelkraft bezogenen Weg s, so ist

$$\omega_1^2 T - \omega^2 T = 2 . F . s$$

59. Beschleunigung eines durch eine drehende Kraft in Bewegung gesetzten Körpers. — Wie sich mit Hülfe des vorigen Ausdrucks aus der Winkelgeschwindigkeit des Körpers in zwei verschiedenen Augenblicken und dem inzwischen vom Angriffspuncte der Kraft zurückge-

legten Wege die Intensität der drehenden Kraft angeben läßt, ebenso muß sich umgekehrt, wenn die Kraft und der Weg ihres Angriffspunctes bekannt ist, die Beschleunigung der Winkelgeschwindigkeit bestimmen lassen. Nehmen wir z. B. ein auf einer horizontalen Welle befindliches Rad (Fig. 99) an, welches mit Hülfe eines um die Welle geschlungenen Seils durch ein Gewicht P um seine Are gedreht wird, so können wir nach der Geschwindigkeit fragen, welche das Rad vom Zustande der Ruhe aus erlangt haben wird, wenn das Gewicht um die Höhe H herabgesunken ist. Wir erhalten, wenn wir die Geschwindigkeit zu Anfang $\omega = 0$, $s = H$ und $F = P$ setzen und unter T das Trägheitsmoment des Rades nebst der Last P verstehen,

$$\omega_1^2 T = 2 . P . H$$

und die gesuchte Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2PH}{T}},$$

die wir nur mit dem Halbmesser des Rades zu multipliciren haben, um die wirkliche Geschwindigkeit eines Punctes in der Radperipherie in dem angenommenen Augenblicke zu finden.

60. Anwendung des Vorigen auf die Schwungräder. — Das Schwungrad ist ein aus schweren eisernen Felgen zusammengesetzter Ring, welcher durch Arme mit einer horizontalen Welle fest verbunden, und, indem er sich um die Welle dreht, bestimmt ist, durch die Trägheit seiner Masse die ungleichförmige Bewegung der Welle möglichst auszugleichen. Ist die Winkelgeschwindigkeit ω innerhalb einer gewissen Zeit, während welcher Kräfte auf das Rad wirkten, in ω_1 übergegangen, so muß der Zuwachs an lebendiger Kraft, welche hierdurch das Schwungrad gewonnen hat, der doppelten Arbeit der Kräfte gleich, d. h. es muß

$$T(\omega_1^2 - \omega^2) = 2Fs$$

sein, woraus

$$\omega_1^2 - \omega^2 = \frac{2Fs}{T}$$

die Differenz der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten folgt. Je weniger die Werthe ω_1 und ω von einander abweichen, desto geringer wird die Differenz ihrer Quadrate sein. Nehmen wir daher an, die Arbeit Fs der Kräfte bliebe innerhalb der angenommenen Zeit unveränderlich, so wird das Trägheitsmoment T um so größer sein müssen, je kleiner die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten oder je gleichförmiger die Bewegung sein soll. Das Trägheitsmoment des Rades aber wächst mit der Masse derselben und mit deren Entfernung von der Axe; es wird daher für jede noch so große mechanische Arbeit der am Rade wirkenden Kräfte ein Schwungrad so angeordnet werden können, daß die Bewegung ziemlich gleichförmig wird, wenn nur die Masse, sowie ihre Entfernung von der Axe hinreichend groß gemacht wird. Diese Ausgleichung der Bewegung hängt genau damit zusammen, daß, wenn die Kräfte die Bewegung zu beschleunigen streben, die Masse des Rades lebendige Kraft in sich ansammelt, welche sich später, wenn die Widerstände größer werden und die Bewegung verzögern, wieder in Arbeitsgröße verwandelt und die Widerstände besiegen hilft. Das Schwungrad gewährt daher den Nutzen, daß es den Ueberschuß der Arbeit der Kraft über die des Widerstandes aufnimmt, um ihn in der Folge, wenn die Arbeit der Widerstände größer, als die der Kräfte geworden ist, zu restituiren. Die Anwendung eines Schwungrades ist sogar unerläßlich bei Maschinen, bei welchen das Verhältniß zwischen der Arbeit der bewegenden Kraft und des Widerstandes so veränderlich ist, daß, während die Arbeit der Kraft am kleinsten oder die des Widerstandes am größten ist, die Geschwindigkeit ohne Schwungrad Null werden würde und die Maschine zur Ruhe käme, ehe das umgekehrte Verhältniß eintreten kann. Es kommt dieser Fall besonders dann vor, wenn die Maschine nur von Zeit zu Zeit einen Widerstand zu überwinden hat, wie z. B. bei den Sägemaschinen. Die Gattersäge schneidet nur beim Niedergange und die Arbeit des Motors ist also beim Aufgange der Säge größer, als die des

Widerstandes, beim Niedergange dagegen kleiner. Das Schwungrad, welches man an einer solchen Maschine anbringt, absorbirt daher während der einen Hälfte eines Spiels lebendige Kraft und fügt dieselbe während der andern Hälfte der des Bewegers hinzu, so daß beide den jetzt größer gewordenen Widerstand überwinden.

61. Entfernung der Kraft der Trägheit eines Körpers von der Axe, um die er sich dreht. — Erhalten die Massen $m, m_1, m_2 \ldots$ in einer kleinen Zeit t die Geschwindigkeitsgrade $v, v_1, v_2 \ldots$, so sind ihre Trägheitskräfte durch $f = \frac{mv}{t}$, $f_1 = \frac{m_1 v_1}{t}$, $f_2 = \frac{m_2 v_2}{t} \ldots$ gemessen. Nun verhalten sich die Geschwindigkeiten, wenn die Massen $m, m_1, m_2 \ldots$ die Theile eines um eine Axe sich drehenden Körpers sind, wie ihre Abstände $r, r_1, r_2 \ldots$ von der Drehaxe; es ist daher $v = r\varphi$, $v_1 = r_1\varphi$, $v_2 = r_2\varphi \ldots$ und $f = mr \cdot \frac{\varphi}{t}$, $f_1 = m_1 r_1 \cdot \frac{\varphi}{t}$, $f_2 = m_2 r \cdot \frac{\varphi}{t} \ldots$, wenn φ die kleine Zunahme der Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Wäre dieser Geschwindigkeitsgrad durch eine auf den Körper wirkende und rechtwinkelig gegen die Axe gerichtete Kraft F bewirkt worden, welche in der Entfernung R von dieser Axe angreift, so wäre diese Kraft das Maß der Trägheit und würde allen den einzelnen Trägheitskräften $f, f_1, f_2 \ldots$ das Gleichgewicht halten; es müßte folglich das statische Moment $F.R$ gleich der Summe der statischen Momente $fr, f_1 r_1, f_2 r_2 \ldots$, d. h.

$$F.R = mr \cdot \frac{\varphi}{t} \cdot r + m_1 r_1 \cdot \frac{\varphi}{t} \cdot r_1 + m_2 r_2 \cdot \frac{\varphi}{t} \cdot r_2 + \ldots$$

$$= \frac{\varphi}{t}(mr^2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$$

$$= \frac{\varphi}{t} \cdot T$$

sein. Das Product F . R kann man das Moment der Trägheit nennen, da es aus einer die Trägheit messenden Kraft und ihrem Abstande von der Drehaxe zusammengesetzt ist, und man kann sagen, daß das Moment der Trägheit bei der drehenden Bewegung eines Körpers gleich ist dem Trägheitsmoniente, multiplicirt mit dem Verhältniß der kleinen Zunahme der Winkelgeschwindigkeit zu dem Zeitelemente, in welchem sie dem Körper ertheilt wurde. Man sieht daraus, daß zwischen Moment der Trägheit und Trägheitsmoment wohl eine nahe Verwandtschaft stattfindet, daß beide aber keineswegs eins und dasselbe sind.

Aus der obigen Gleichung folgt umgekehrt

$$\varphi = \frac{F \cdot R \cdot t}{T}$$

ein Ausdruck, welcher für die Drehbewegung so viel ist, wie der Ausdruck $v = \frac{F \cdot t}{M}$ §. 45 der II. Abtheilung für die progressive Bewegung. Es kann daher auch aus der bewegenden Kraft F, welche, rechtwinkelig gegen die Axe wirkend, die Bewegung hervorbringt, für jeden Augenblick die kleine Zunahme an Winkelgeschwindigkeit bestimmt werden, wenn das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehaxe bekannt ist. Hierdurch wird man auch in den Stand gesetzt, das Gesetz der Bewegung durch eine Curve darzustellen, welche man dadurch erhält, daß man auf die zur Abscissenlinie an einander gereihten Zeitelemente als Ordinaten die erlangten Geschwindigkeiten aufträgt.

62. Die Trägheitsmomente homogener Körper lassen sich ebensowohl auf die Rauminhalte ihrer Theile, wie auf deren Massen beziehen. — Wir sahen §. 53, daß die Productensumme $T = mr^2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$ das Trägheitsmoment eines Körpers ist, dessen Massentheile $m, m_1, m_2 \ldots$ sich in den Entfernungen $r, r_1, r_2 \ldots$ der Drehaxe befinden. Entsprechen nun den Massen $m, m_1, m_2 \ldots$ die Volumina $a, a_1, a_2 \ldots$

und ist das Gewicht einer Cubikeinheit des homogenen, d. h. aus gleichartigen Theilen bestehenden Körpers γ, so sind $a\gamma$, $a_1\gamma$, $a_2\gamma$ .... die Gewichte und $m = \frac{a\gamma}{g}$, $m_1 = \frac{a_1\gamma}{g}$, $m_2 = \frac{a_2\gamma}{g}$ ... die Massentheile. Es kann daher das Trägheitsmoment unter die Form

$$T = \frac{\gamma}{g}(ar^2 + a_1r_1^2 + a_2r_2^2 + \ldots) = \frac{\gamma}{g} \cdot K$$

gebracht werden, in welcher nur

$$K = ar^2 + a_1r_1^2 + a_2r_2^2 + \ldots,$$

das Trägheitsmoment in Bezug auf die Volumina der Körpertheile zu bestimmen bleibt. Aus dieser Größe kann man dann durch Multiplication mit dem Gewichte einer Cubikeinheit und durch Division mit der Fallgeschwindigkeit g am Ende der ersten Secunde das Trägheitsmoment der Masse des Körpers sofort finden.

63. Trägheitsmoment verschiedener Körper in Bezug auf ihre Volumina. — Für einige der Körper, bei denen es am häufigsten in der Mechanik auf die Kenntniß der Trägheitsmomente ankommt, sind dieselben bestimmt worden *).

---

*) Wie wir aus dem vorigen Paragraphen ersehen haben, hat man, um das Trägheitsmoment eines Volumens aufzufinden, die einzelnen Trägheitsmomente der Körpertheile zu suchen und diese durch Addition zu vereinigen. Nimmt man dabei die Summation arithmetischer Reihen zu Hülfe, so gelangt man zu geschlossenen Ausdrücken. Die Entwickelung einiger der obigen Trägheitsmomente auf diesem Wege wird hinreichen, von dem Verfahren dabei einen Begriff zu geben.

Es stelle Fig. 100 einen so dünnen prismatischen Körper vor, daß CH im Verhältniß zu EH und DH vernachläßigt werden kann; ferner bezeichne a den Querschnitt, l_1 die Höhe und $EM = b$ die Entfernung von der Drehare XZ, welche parallel zur Kante HE ist, und cae eines der unendlich vielen

1) Das Trägheitsmoment einer sehr schmalen Stange AB (Fig. 102), welche sich um eine durch ihre Mitte

---

gleichen Körperelemente, in welche man sich den Körper durch Ebenen, normal auf AH, zerlegt denken kann, und von welchen jedes die Dicke d hat. Das Trägheitsmoment dieses Elementes wird dann durch das Product aus seinem Volumen ad in das Quadrat seiner Entfernung BM von der Drehaxe, und da $\overline{BM}^2 = b^2 + y^2$ ist, durch

$$ad \,.\, (b^2 + y^2)$$

ausgedrückt sein. Wenn man dann für y nach einander die Werthe d, 2d, 3d ... bis $nd = l_1$ setzt, wo n die Anzahl der Elemente ist, so erhält man die Trägheitsmomente aller derselben, deren Summe dem Trägheitsmomente des ganzen prismatischen Körpers gleich ist. Es folgt daher

$$K = ad\,(b^2 + d^2) + ad\,(b^2 + [2d]^2) + ad\,(b^2 + [3d]^2) + ad\,(b^2 + [nd]^2)$$

$$= ad\,\{b^2 + d^2 + b^2 + (2d)^2 + b^2 + (3d)^2 + (nd)^2\}$$

$$= ad\,\{b^2 + b^2 + b^2 + \ldots d^2\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + .\, n^2)\}$$

und da b^2 so oft vorhanden ist, als Elemente da sind, also n mal und für eine unbegrenzte Anzahl n von Gliedern die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen $\frac{n^3}{3}$ ist, so ist auch

$$K = ad\left\{nb^2 + \frac{d^2 n^3}{3}\right\} = a\left\{nd \,.\, b^2 + \frac{(nd)^3}{3}\right\}$$

Nun ist aber nd nichts anderes, als die ganze Länge l_1, mithin

$$K = a\left(l_1 b^2 + \frac{l_1^3}{3}\right) = al_1\left(b^2 + \frac{l_1^2}{3}\right)$$

Wäre die Verlängerung der Stange nach unten l_2 (Fig. 101), so würde $al_2\left(b^2 + \frac{l_2^2}{3}\right)$ das Trägheitsmoment derselben und

$$K = al_1\left(b^2 + \frac{l_1^2}{3}\right) + al_2\left(b^2 + \frac{l_2^2}{3}\right)$$

das des ganzen Körpers sein. Für $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$, d. h. wenn

gehende und zu ihrer Länge winkelrechte Axe dreht und welche die Länge l und den Querschnitt a hat, ist das Trägheitsmoment

$$K = \frac{1}{12} \cdot l^2 \cdot al$$

und wenn das Volumen al mit A bezeichnet wird

$$K = \frac{l^2}{12} \cdot A$$

---

der Punct A in der Mitte der ganzen Länge l liegt, wird ferner

$K = al\left(b^2 + \frac{l^2}{12}\right)$ und geht dann noch die Axe durch die Stange selbst, wie in Fig. 102, so ist $b = o$ und

$K = al \cdot \frac{l^2}{12} = \frac{l^2}{12} \cdot A$, wenn A das Volumen des Körpers bezeichnet.

Das rechtwinkelige Parallelepipedon (Fig. 103), welches um eine der Kante b parallele und durch die Mitte von l gehende Axe XZ gedreht wird, läßt sich als aus plattenförmigen Körpern, wie die vorigen, zusammengesetzt denken. Bezeichnet b die Dicke derselben, so ist für ein Element des Parallelepipedons

$lbd\left(x^2 + \frac{l^2}{12}\right)$ das Trägheitsmoment, und setzt man für x der Reihe nach d, 2d, 3d ..., so erhält man die Trägheitsmomente sämmtlicher Elemente, d. h. das des ganzen Parallelepipedons

$$K = lbd\left\{d^2 + \frac{l^2}{12} + (2d)^2 + \frac{l^2}{12} + (3d)^2 + \frac{l^2}{12} + \ldots\right\}$$

$$K = lbd\left\{\frac{nl^2}{12} + d^2\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)\right\}$$

$$= lb\left\{nd \cdot \frac{l^2}{12} + \frac{d^3n^3}{3}\right\}$$

und da $nd = h$ ist,

$$K = lb\left\{\frac{hl^2}{12} + \frac{h^3}{3}\right\} = \frac{lbh}{12}\,(l^2 + 4h^2) = \frac{l^2 + 4h^2}{12} \cdot A.$$

2) Für einen geraden Kreiscylinder (Fig. 105) vom Halbmesser r und der Länge l, welcher sich um seine geometrische Axe schwingt, ist das Trägheitsmoment in Bezug auf das Volumen

$K = \frac{\pi}{2} l r^4$ und wenn wiederum $r^2\pi \cdot l = A$ das Volumen bezeichnet

$$K = \frac{r^2}{2} \cdot A.$$

Um das Trägheitsmoment eines geraden Kreiscylinders (Fig. 105) von der Höhe l und dem Radius r zu finden, wenn sich derselbe um seine Axe dreht, kann man ihn als aus sehr dünnen Ringen zusammengesetzt denken, deren Dicke d ein unendlich kleiner Theil des Halbmessers ist. Der Inhalt eines solchen Ringes ist $2\pi x \cdot d \cdot l$ und da die Masse desselben überall gleichweit von der Axe entfernt ist

$2\pi x \cdot ld \cdot x^2 = 2dl\pi \cdot x^3$ das Trägheitsmoment.

Setzt man für x nach und nach die Werthe d, 2d, 3d ... nd, so erhält man für das Trägheitsmoment des Cylinders

$$K = 2dl\pi \left\{(d)^3 + (2d)^3 + (3d)^3 + \ldots (ad)^3\right\}$$
$$= 2l\pi \cdot d^3 \left\{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3\right\}$$
$$= 2l\pi \frac{d^4 \cdot n^4}{4} \text{ und da } nd = r \text{ ist}$$
$$= \frac{r^4 l\pi}{2} = \frac{r^2}{2} \cdot A, \text{ weil } r^2\pi l \text{ der Inhalt A des Cylinders ist.}$$

Endlich bezeichne Fig. 111 einen prismatischen Körper, von dessen Grundflächen jede aus zwei gleichen Parabelsegmenten zusammengesetzt ist, deren größte Coordinaten $\frac{b}{2}$ und c sind; h sei die Höhe des Prisma's und XZ die durch die Mitte des Prisma's gehende Axe. Für ein Element desselben, welches als ein plattenförmiger Körper betrachtet werden kann, und für welches die Höhe die doppelte Ordinate y, die Breite h

3) Bedeutet a die Höhe, b die Breite eines cylindrischen Kranzes (Fig. 106) von rectangulärem Querschnitte,

---

und die Entfernung von der Axe c—x ist, erhält man nach dem Früheren das Trägheitsmoment

$$dh \cdot 2y \left\{(c-x)^2 + \frac{(2v)^2}{12}\right\},$$

oder da bei der Parabel die Quadrate der Ordinaten sich wie die Abscissen verhalten, d. h.

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{x}{c} = \text{oder } y^2 = \frac{b^2}{4c} \cdot x \text{ und } y = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{x}{c}} \text{ ist,}$$

$$2hd \cdot \frac{b}{2}\sqrt{\frac{x}{c}}\left\{(c-x)^2 + \frac{b^2}{12c} \cdot x\right\}$$

$$= \frac{hbd}{\sqrt{c}}\left\{c^2 x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{b^2 - 24c^2}{12c}\right\}$$

Ertheilt man x der Reihe nach die Werthe d, 2d, 3d ... nd, so wird das Trägheitsmoment der einen Körperhälfte

$$K = \frac{hbd}{c^{\frac{1}{2}}}\left\{c^2 d^{\frac{1}{2}} + d^{\frac{5}{2}} + d^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{b^2 - 24c^2}{12c} + c^2 (2d)^{\frac{1}{2}} + (2d)^{\frac{5}{2}} + (2d)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{b^2 - 24c^2}{12c} + \ldots c^2 (nd)^{\frac{1}{2}} + (nd)^{\frac{5}{2}} + (nd)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{b^2 - 24c^2}{12c}\right\}$$

$$= \frac{hbd}{c^{\frac{1}{2}}}\left\{c^2 d^{\frac{1}{2}} (1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \ldots n^{\frac{1}{2}}) + d^{\frac{5}{2}} (1^{\frac{5}{2}} + 2^{\frac{5}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} + \ldots n^{\frac{5}{2}}) + \frac{b^2 - 24c^2}{12c} \cdot d^{\frac{3}{2}} (1^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} + \ldots n^{\frac{3}{2}})\right\}$$

$$K = \frac{hb}{c^{\frac{1}{2}}}\left\{c^2 \cdot \frac{2}{3}(nd)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7} \cdot (nd)^{\frac{7}{2}} + \frac{b^2 - 24c^2}{12c}(nd)^{\frac{5}{2}}\right\}$$

und da nd = c ist,

$$= \frac{hb}{c^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{2}{3} \cdot c^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{7} \cdot c^{\frac{7}{2}} + \frac{b^2 - 24c^2}{12c} \cdot \frac{2}{5} \cdot c^{\frac{5}{2}}\right\}$$

$$= \frac{hbc}{210}\left\{32c^2 + 7b^2\right\}$$

der sich um seine geometrische Axe dreht, und ist r der mittlere Halbmesser, so ist das Trägheitsmoment

$$K = 2r\pi \cdot ab \left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right)$$ und weil $2r\pi \cdot ab = A$ ist

$$K = \left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right) A.$$

Für $b < \frac{r}{5}$ kann man $\frac{b^2}{4}$ außer Acht lassen, so daß $K = r^2 \cdot A$ bis auf $\frac{1}{100}$ des Ganzen genau ist.

4) Das Trägheitsmoment eines Kugelabschnitts (Fig. 107), der sich um einen durch seinen Pol gehenden Durchmesser dreht, ist, wenn r den Radius der Kugel und f den Pfeil bezeichnet.,

$$K = \pi f^3 \left\{\frac{2}{3} r^2 - \frac{1}{2} fr + \frac{1}{10} f^2\right\}$$

Da für $f = 2r$ der Kugelabschnitt zur Kugel $A = \frac{4}{3} r^3 \pi$ selbst wird, so wird das Trägheitsmoment der letztern

$$K = \pi \cdot \frac{8}{15} r^5 = \frac{2}{5} r^2 \cdot A.$$

5) Das Trägheitsmoment des geraden Kreiskegels (Fig. 108) von der Höhe h, welcher zur Basis den Halbmesser r hat und sich um seine Axe dreht, ist

$$K = \frac{\pi}{10} hr^4 \text{ oder da } \frac{r^2 \pi h}{3} = A$$

$$K = \frac{3}{10} r^2 \cdot A.$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers wird daher

$$K = \frac{hbc}{105}\left(32c^2 + 7b^2\right)$$ und da der Inhalt desselben

$$A = \frac{2}{3} \cdot 2bch \text{ ist,}$$

$$K = \frac{32c^2 + 7b^2}{140} \cdot A.$$

Dies wird genügen, den Weg anzudeuten, den man unter Anwendung der Elementarmathematik bei Aufsuchung der Trägheitsmomente anzuschlagen hat.

Ein abgestumpfter Kegel, dessen Höhe h ist und der zur größern und kleinern Grundfläche die Halbmesser r und r_1 hat, besitzt in Bezug auf seine Axe das Trägheitsmoment

$$K = h \cdot \frac{\pi}{10} \frac{r^5 - r_1^5}{r - r_1} \text{ und da } \frac{h\pi}{3} (r^2 + rr_1 + r_1^2) = A \text{ ist,}$$

$$K = \frac{3}{10} \cdot \frac{r^5 - r_1^5}{r^3 - r_1^3} \cdot A.$$

6) Das Trägheitsmoment eines Ellipsoides (Fig. 109), dessen drei Halbaxen a, b, c sind und das sich um die Axe a dreht, ist

$$K = \frac{4}{15} \cdot abc\pi\ (b^2 + c^2) \text{ und, da } \frac{4}{3}\ abc\pi = A \text{ das}$$

Volumen des Ellipsoides ist,

$$K = \frac{b^2 + c^2}{5} \cdot A.$$

7) Ein rechtwinkeliges Parallelepipedon (Fig. 104), dessen Dimensionen b, h, l sind und welches sich um eine durch seinen Schwerpunct gehende und mit der Seite b parallele Axe dreht, hat zum Trägheitsmoment

$$K = \frac{bhl}{12} (l^2 + h^2) = \frac{h^2 + l^2}{12} \cdot A.$$

Geht die Drehaxe parallel zur Seite b und halbirt sie die Kanten l der durch l und b gebildeten Fläche (Fig. 103), so ist

$$K = \frac{bhl}{12} (l^2 + 4h^2) = \frac{l^2 + 4h^2}{12} \cdot A.$$

8) Das Trägheitsmoment eines Prisma's (Fig. 110) von der Höhe h mit trapezförmigen Grundflächen, deren parallele Seiten b und b_1 in der Entfernung c von einander abstehen, ist in Bezug auf eine Axe, welche die größeren der parallelen Seiten beider Grundflächen halbirt und parallel zu h geht,

$$K = hc\left(\frac{b + b_1}{2}\right)\left(\frac{b^2 + b_1^2}{24} + \frac{c^2}{6} \cdot \frac{b + 3b_1}{b + b_1}\right)$$

$$= \left(\frac{b^2 + b_1^2}{24} + \frac{c^2}{6} \cdot \frac{b + 3b_1}{b + b_1}\right) A.$$

Wenn c gegen b und b_1 groß und jedes der letztern kleiner, als $\frac{c}{3}$ ist, so kann man $\frac{b^2 + b_1^2}{24}$ vernachlässigen und

$K = \frac{hc^3}{12}(b + 3b_1) = \frac{c^2}{6} \cdot \frac{b + 3b_1}{b + b_1} \cdot A$ setzen, wobei der Fehler nicht über $\frac{1}{36}$ vom Ganzen betragen kann.

9) Denkt man sich an der Stelle der trapezförmigen Grundfläche eine aus zwei gleichen Parabelsegmenten zusammengesetzte (Fig. 111), für welche die größte Abscisse c, die größte Ordinate $\frac{b}{2}$ ist, so erhält man das Trägheitsmoment eines solchen Prisma's in Bezug auf eine durch die Mitte gehende und mit der Dimension b parallele Axe

$$K = \frac{2 \cdot bhc}{210}(32c^2 + 7b^2) \text{ und weil } 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot bhc = A \text{ ist,}$$

$$K = \frac{32c^2 + 7b^2}{140} \cdot A.$$

Für $b < \frac{1}{3} c$ kann $K = \frac{32}{105} hbc^3 = \frac{8}{35} c^2 \cdot A$ gesetzt werden, ohne daß der Fehler mehr, als $\frac{1}{42}$ des Ganzen beträgt.

Es ist diese letztre Körperform die eines Balanciers, welchem man, damit er an allen Stellen gleichen Widerstand gegen das Brechen leiste, die parabolische oder doch nahe parabolische Gestalt giebt.

64. Trägheitsmomente eines und desselben Körpers in Bezug auf zwei verschiedene, mit ein-

ander paralle Axen. — Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct desselben gehende Axe, so kann man daraus das Moment in Beziehung auf jede andere der vorigen parallele Axe finden. Es ist dies besonders von Northeil, um die Trägheitsmomente für Axen, welche durch den Schwerpunct gehen und welche sich immer am leichtesten bestimmen lassen, in solche für andere Axen zu verwandeln. Es sei zu dem Ende **XX**, eine durch den Schwerpunct des Körpers (Fig. **112**) gehende und **YY**, eine der vorigen parallele Axe, auf welche das Trägheitsmoment **T**, zu **XX**, gehörig, bezogen werden soll. Legt man durch **XX**, und **YY**, eine Ebene **OP** und durch den Körper eine Normalebene **MN** zu den Axen, bezeichnet durch $md_1 = m_1d$ den Abstand des Körperelementes m von der Ebene **OP**, ferner die Entfernung beider Axen **ab** mit **e**, zieht $am_1 = R$, $bm_1 = r$ die Abstände des Elementes m von den beiden Axen, so erhält man, wenn **s** die Projection **ad** von **am**, auf **ab** bezeichnet, nach einem bekannten Satze, aus dem Dreiecke **abm**, die Gleichung

$$\overline{bm}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{am_1}^2 + 2 \cdot ab \cdot ad \text{ oder}$$
$$r^2 = e^2 + R^2 + 2es.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit der Masse m, so wird

$$mr^2 = me^2 + mR^2 + 2e \cdot m \cdot s.$$

Für andere Körperelemente von den Massen $m_1, m_2 \ldots$ erhält man daher auch

$$m_1r_1^2 = m_1e^2 + m_1R_1^2 + 2e \cdot m_1s_1$$
$$m_2r_2^2 = m_2e^2 + m_2R_2^2 + 2e \cdot m_2s_2 \text{ u. s. f.},$$

indem der Abstand **e** der beiden Axen für alle Elemente der nämliche ist. Diese Gleichungen enthalten die Werthe mr^2, $m_1r_1^2 \ldots$. und mR^2, $m_1R_1^2 \ldots$., welche nichts anderes, als die Trägheitsmomente der Körpertheile, jene in Bezug auf die Are **XX**$_1$, diese in Bezug auf **YY**, sind. Addiren wir sämmtliche Gleichungen, und bezeichnen wir die

Summe $mr^2 + m_1r^2, + m_2r_2^2 \ldots$ oder das Trägheitsmoment zur Drehaxe XX, durch T, und das zur Axe YY,, also $mR^2 + m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + \ldots$ mit T_1, so wird

$$T = T_1 + e^2(m + m_1 + m_2 + \ldots) + 2e(ms + m_1s_1 + m_2s_2 + \ldots)$$

In diesem Ausdrucke ist $m + m_1 + m_2 + \ldots$ die ganze Masse des Körpers und $ms + m_1s_1 + m_2s_2 + \ldots$ die Summe der Producte der Massentheile in ihre Abstände gegen eine sowohl zu OP, als auch zu MN senkrechte und durch die Axe XX, gehende Ebene. Diese Momente sind daher zusammengenommen nichts weiter, als das Moment MS der ganzen Masse in Bezug auf diese Ebene, wenn S den Abstand des Schwerpuncts von derselben bezeichnet. Allein offenbar ist $S = 0$, weil der Schwerpunct des Körpers der Annahme zufolge in der Axe XX, selbst liegt, und es ist mithin $ms + m_1s_1 + \ldots$, d. h. das ganze letzte Glied der Gleichung Null, so daß nur

$$T = T_1 + e^2M$$

übrig bleibt.

Das Trägheitsmoment eines Körpers für eine beliebige Axe ist also jederzeit dem Trägheitsmomente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct gehende und der vorigen parallele Axe gleich, wenn man dazu das Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Entfernung beider Axen addirt.

Bei homogenen Körpern wird man die auf das Volumen bezogenen Momente K und K_1 und statt der Masse das Volumen A selbst setzen können, denn ist γ das Gewicht einer Cubikeinheit des Körpers, so hat man

$$T = \frac{\gamma}{g} \cdot K,\ T_1 = \frac{\gamma}{g} \cdot K_1 \text{ und } M = \frac{\gamma}{g} \cdot A$$

mithin

$$K = K_1 + e^2 \cdot A.$$

Wir hatten z. B. für einen geraden Cylinder, der sich um seine Axe dreht, das Trägheitsmoment $\frac{r^2}{2} \cdot A$ gefunden.

Nehmen wir daher an, daß er sich um eine andere, mit dieser parallele und um e von ihr entfernte Axe drehe, so erhalten wir sein Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe

$$K = \frac{r^2}{2} . A + e^2 . A = \left(\frac{r^2}{2} + e^2\right) A$$

Für eine Kugel, für welche dasselbe in Bezug auf einen Durchmesser derselben als Drehaxe $\frac{2}{5} r^2 . A$ war, folgt das Trägheitsmoment

$$K = \frac{2}{5} r^2 . A + e^2 A = \left(\frac{2}{5} r^2 + e^2\right) A,$$

wenn sie sich um eine Axe in der Entfernung e vom Mittelpuncte dreht.

Sind die Dimensionen des Körpers im Verhältnisse zur Entfernung von der Drehaxe sehr klein, so wird auch T_1 oder K_1 gegen $e^2 . M$ oder $e^2 . A$ sehr klein sein, so daß man

$$T = e^2 M \text{ oder } K = e^2 . A$$

d. h. das Trägheitsmoment dem Producte aus der Masse oder dem Volumen des Körpers in das Quadrat der Entfernung seines Schwerpunctes von der Drehaxe setzen kann.

Wird die Gleichung $T = T_1 + e^2 . M$ mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit ω multiplicirt, so wird

$$\omega^2 . T = \omega^2 . T_1 + e^2 \omega^2 . M$$

In dieser Gleichung ist nach §. 58 d. II. Abth. $\omega^2 T$ die wirkliche lebendige Kraft des Körpers, $\omega^2 T_1$ diejenige, welche er besitzen würde, wenn er sich um eine durch seinen Schwerpunct gehende Axe drehte, endlich $e\omega$ die Geschwindigkeit seines Schwerpuncts und $(e\omega)^2 M$ die lebendige Kraft des Körpers, insofern wir seine ganze Masse im Schwerpuncte concentrirt annehmen. Die lebendige Kraft, welche der Körper besitzt, ist daher aus den letztern beiden zusammengesetzt. Werden wieder die Dimensionen des Körpers sehr klein im Verhältniß zu seiner Entfernung von der

Drehaxe angenommen, so verschwindet $\omega^2 T$ gegen $e^2\omega^2 M$ und man hat einfach

$$\omega^2 T = e^2\omega^2 M,$$

d. h. die lebendige Kraft des Körpers ist dann gleich dem Producte aus seiner Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit seines Schwerpuncts.

65. Anwendung der Trägheitsmomente auf Maschinen. — Es sei (Fig. 113) ein Schwanzhammer, aus dem hölzernen Hammerhelme **AB**, der sich bei **O** vermittelst einer aufgeschobenen Hülse um Zapfen drehen kann, und dem Kopfe **D** bestehend, welcher an dem Helme durch Keile befestigt ist. Beträgt das Gewicht des Hammerkopfes **P** und ist sein Schwerpunct von der Drehaxe in der Entfernung r, so kann man, da seine Dimensionen im Verhältniß zu r klein sind, als Trägheitsmoment desselben genau genug $\frac{P}{g} . r^2$ setzen. Der Hammerhelm, dessen Länge l, Breite b, Höhe h und dessen Gewicht P_1 ist, würde als parallelepipedischer Körper, wenn er sich um eine durch seinen Schwerpunct gehende und mit der Dimension b parallele Axe drehte, das Trägheitsmoment $\frac{l^2 + h^2}{12} \cdot \frac{P_1}{g}$ besitzen. Da er sich aber um eine von dieser um r_1 entfernte Axe dreht, beträgt dasselbe

$$\frac{l^2 + h^2}{12} \cdot \frac{P_1}{g} + r_1^2 \cdot \frac{P_1}{g} = \frac{P_1}{g}\left(r_1^2 + \frac{l^2 + h^2}{12}\right)$$

und das ganze Trägheitsmoment des Hammers ist, wenn man von den übrigen unbedeutenderen Theilen, wie Hülse, Bänder, Keile und dergl. absieht,

$$\frac{1}{g}\left\{Pr^2 + P_1\left(r_1^2 + \frac{l^2 + h^2}{12}\right)\right\}$$

Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes eines Schwungrings kann man ohne erheblichen Fehler die Entfer-

nung aller Theile von der Drehaxe gleichgroß annehmen und wenn r den mittlern Halbmesser und P das Gewicht desselben bezeichnet, $T = \frac{P}{g} . r^2$ setzen. Wenn ω nun die Winkelgeschwindigkeit des Schwungringes ist, so erhält man die lebendige Kraft desselben $\omega^2 T = \frac{P}{g} r^2 \omega^2 = \frac{P}{g} . (r\omega)^2$.

Ist daher das Gewicht des Ringes $P = 2000$ Kil., der mittlere Halbmesser $r = 2$ Meter und die Zahl der Umdrehungen pro Minute $u = 25$, so ist die Geschwindigkeit ωr eines Punctes in der Mitte des Ringes $\frac{25 . 2r\pi}{60} =$

$\frac{5}{6} . 2\pi = 5{,}236^{m}$ und die lebendige Kraft $\frac{2000}{9{,}81} . 5{,}^{2}236$ $= 5590$. Die Hälfte davon 2795^{km} ist die Arbeitsgröße, welche die Trägheit des Schwungringes in Anspch genommen hat, welche aber von dieser restituirt wird, sobald die Kraft aufhört zu wirken, indem das Schwungrad eben vermöge der in seiner trägen Masse angehäuften lebendigen Kraft die Bewegung noch eine Zeit lang unterhält.

VII.

Centrifugalkraft.

66. Centrifugalkraft eines gleichförmig im Kreise bewegten Körpers von geringen Dimensionen. — Wenn einem Körper A vom Gewichte P (Fig. 114) eine Geschwindigkeit in der Richtung AT mitgetheilt wird, so geht er als freier Körper vermöge seiner Trägheit in dieser Richtung mit gleichbleibender Geschwindigkeit fort. Ist er aber durch eine Stange AC mit dem festen Puncte C so verbunden, daß AT normal zu AC ist, so wird die Stange ihn hindern, sich von dem Puncte C zu entfernen und ihn zwingen, um denselben im Kreise herumzugehen. Es wird daher in der Richtung der Stange eine Kraft auf den Körper wirken, welche ihn dem Drehpuncte zu nähern sucht, während der Körper wieder in entgegengesetzter Richtung auf die Stange zurückwirkt. Die erste dieser beiden Kräfte, welche nach dem Satze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung einander gleich sind, nennt man die Centripetalkraft, die andere die Centrifugalkraft. Bei der Annahme, daß eine Stange es ist, welche den Körper hindert, sich von C weiter zu entfernen, tritt ein Theil der Festigkeit derselben als Centripetalkraft auf, die Centrifugalkraft aber ist der Druck, welchen der bewegte Körper gegen die Stange in deren Richtung, d. i. normal gegen die kreisförmige Bahn ausübt. Um die Größe dieses Druckes zu messen, wollen wir zunächst die Dimensionen des Körpers so klein annehmen, daß wir ihn als materiellen Punct betrachten dürfen. Es bezeichne v

die Geschwindigkeit, welche dem Körper in der Richtung AT ertheilt wird, **AB**, **BC**, **CD** (Fig. 115) die Wege, welche er in aufeinanderfolgenden Zeitelementen t durchläuft und die wir, weil sie die unendlich kleinen Theile einer Kreisperipherie sind, als die Seiten eines sehr vielseitigen regulären Polygons betrachten können. Denken wir uns in dem Augenblicke, wo der Körper am Ende **B** der Polygonseite **AB** ankommt, die Verbindung desselben mit dem Puncte **O** einmal plötzlich aufgehoben, so würde derselbe in der Verlängerung von **AB** mit der Geschwindigkeit $BV = v$ fortgehen und wir hätten in der Componente **BU** derselben, welche radial gerichtet ist, den Geschwindigkeitsgrad, welchen ihm die Centrifugalkraft mittheilte, in BU^1 dagegen die Geschwindigkeit, mit welcher er seine Bewegung auf dem nächsten Elemente **BC** des Kreises fortsetzen würde, wenn die Verbindung mit **O** nicht aufgehoben worden wäre. In dem Parallelogramm $UBVU^1$ ist also die Seite $BU = U^1V$ der der Centrifugalkraft entsprechende Geschwindigkeitsgrad, $BU^1 = UV$ die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper das Kreiselement **BC** zurücklegt, wenn er mit dem Puncte **O** fest verbunden ist, und die Diagonale $BV = v$ die Geschwindigkeit, mit welcher er das vorige Element verläßt. Nun sieht man leicht, daß die Winkel **OBC** und **OBA**, ferner **OBC**, **BUV**, BU^1V und endlich **OBA**, BVU^1 einander gleich sind und daß, da gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberliegen, $BU^1 = BV = v$, d. h. daß die Geschwindigkeit des materiellen Punctes in dem Elemente **BC** ebenso groß ist, wie im vorhergehenden **AB**. Es ändert sich daher die Geschwindigkeit, welche einem Körper bei seiner Bewegung im Kreise anfänglich mitgetheilt wurde, nicht. Wir konnten dies auch schon aus §. 9 d. II. Abth. schließen, da die Centrifugalkraft beständig in einer Richtung wirkt, welche zu derjenigen, in welcher der Körper nur ausweichen kann, rechtwinkelig ist; sie kann daher keine Arbeit verrichten und die lebendige Kraft, mithin auch die Geschwindigkeit nicht alteriren.

Wie wir oben sahen, hat der bewegte Körper vermöge der Centrifugalkraft F das Bestreben, in jedem Zeitelemente t einen Geschwindigkeitsgrad BU oder U¹V anzunehmen. Bezeichnet daher M seine Masse, so wird nach §. 71 der I. Abth. das Maß dieser Kraft

$$F = \frac{M \cdot VU^1}{t}$$

sein. Nun ist aber der Winkel $OBC = BU^1V = BVU^1$ und das Dreieck BVU^1 ein gleichschenkliges, es wird daher dem ebenfalls gleichschenkligen Dreiecke OBC ähnlich sein, so daß

$$BO : BC = BU^1 : VU^1 \text{ und}$$

$$VU^1 = \frac{BC \cdot BU^1}{BO} \text{ und da } BU^1 = BV = v \text{ ist,}$$

$$VU^1 = \frac{BC \cdot v}{r},$$

wenn r den Halbmesser BO bezeichnet. Die Seite BC des Polygons bestimmt sich aber aus der Geschwindigkeit v, mit welcher, und aus der Zeit t, in welcher sie zurückgelegt wird; sie ist $BC = vt$, woraus

$$VU^1 = \frac{v^2 t}{r}$$

und die Centrifugalkraft

$$F = \frac{M \cdot v^2 \cdot t}{t \cdot r} = \frac{Mv^2}{r}$$

folgt.

Die Centrifugalkraft eines materiellen Punctes ist also gleich der lebendigen Kraft desselben, dividirt durch den Halbmesser des Kreises, in welchem sich sein Schwerpunct bewegt.

Für einen Körper z. B., welcher 12 Kil. wiegt und sich mit 2m Geschwindigkeit in einem Kreise von $\frac{3}{4}$ m Halbmesser bewegt, ist die Centrifugalkraft $\frac{12 \cdot 2^2}{9{,}81 \cdot 0{,}75} = 6{,}52$ Kil.

Die Stange, welche den Körper in der Kreisbewegung erhält, wird daher von demselben mit einer Kraft in ihrer eigenen Richtung gezogen, welche einem Gewichte von 6,52 Kil. entspricht.

Die feste Verbindung des Körpers mit dem Drehpuncte kann übrigens auch durch eine kreisförmige Rinne vermittelt werden, welche den Körper zwingt, immer in der nämlichen Entfernung von dem Mittelpuncte derselben zu bleiben. Der Druck, welchen die äußere Wand derselben erleidet, ist wieder der Centrifugalkraft $F = \frac{Mv^2}{r}$ gleich.

67. Centrifugalkraft eines Körpers von größeren Abmessungen. — Für ein Massenelement m einer dünnen Platte **ABCD** (Fig. 116), welche sich um einen in ihrer Ebene liegenden Punct O oder eine gegen dieselbe winkelrechte Axe O mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist $r\omega$ die Geschwindigkeit, wenn r die Entfernung des Elementes von **O** ist. Nach dem vorigen Paragraphen wird daher die Centrifugalkraft desselben durch $\frac{m \cdot (r\omega)^2}{r}$ $= mr\omega^2$ ausgedrückt werden können. Zerlegen wir diese Kraft, welche in der Richtung Om wirkt, nach zwei rechtwinkelig sich schneidenden Axen Ox und Oy in zwei Seitenkräfte $mK = Y$, $mH = X$, so sind diese und ihre Resultante mE proportional den Seiten mp und mq und der Diagonale m**O** des Rechtecks **O**pmq. Man hat daher

$$Y : mE = Oq : mO$$
$$X : mE = Op : mO$$

und da $mO = r$ und $mE = mr\omega^2$ ist,

$$Y = \frac{mr\omega^2 \cdot Oq}{r} = m \cdot Oq \cdot \omega^2 \text{ und}$$

$$X = \frac{mr\omega^2 \cdot Op}{r} = m \cdot Op \cdot \omega^2$$

Die Centrifugalkräfte $m_1\omega^2 r_1$, $m_2\omega^2 r_2 \ldots$, anderer Massentheile m_1, $m_2 \ldots$, lassen sich ebenso nach den Axen Ox und Oy in

$$Y_1 = m_1 Oq_1 \cdot \omega^2 \quad Y_2 = m_2 Oq_2 \cdot \omega^2$$
$$X_1 = m_1 Op_1 \cdot \omega^2 \quad X_2 = m_2 Op_2 \cdot \omega^2 \text{ u. s. f.}$$

zerlegen, so daß die Componenten derselben in zwei nach den Axen Ox und Oy gerichtete Kräftegruppen

$$mOp \cdot \omega^2 + m_1 Op_1 \cdot \omega^2 + m_2 Op_2 \cdot \omega^2 + \ldots$$
$$= \omega^2 (mOp + m_1 Op_1 + m_2 Op_2 + \ldots)$$

und

$$mOq \cdot \omega^2 + m_1 Oq_1 \cdot \omega^2 + m_2 Oq_2 \cdot \omega^2 + \ldots$$
$$= \omega^2 (mOq + m_1 Oq_1 + m_2 Oq_2 + \ldots)$$

gebracht werden können. Ist G der Schwerpunct des ganzen plattenförmigen Körpers und sind $OP = x_1$ und $OQ = y_1$ die Abstände desselben von den beiden Axen Oy und Ox, so ist nach der Lehre von den Momenten

$$mOp + m_1 Op_1 + m_2 Op_2 + \ldots = Mx_1$$
$$mOq + m_1 Oq_1 + m_2 Oq_2 + \ldots = My_1$$

und es sind dadurch die Centrifugalkräfte aller Elemente auf die zwei untereinander rechtwinkeligen Kräfte

$$\omega^2 \cdot Mx_1 \text{ und } \omega^2 \cdot My_1$$

reducirt, welche eine Mittelkraft

$$\sqrt{\omega^4 (Mx_1)^2 + \omega^4 (My_1)^2} = M\omega^2 \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$
$$= M\omega^2 \cdot \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2}$$
$$= OG \cdot M\omega^2$$

geben.

Für eine dünne Platte, welche sich um einen in ihrer Ebene liegenden Punct dreht, ist daher die Centrifugalkraft gleich dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit, multiplicirt mit dem Producte der Masse in die Entfernung ihres Schwerpuncts vom Drehpuncte, oder was dasselbe ist, gleich der Centrifugalkraft ihres Schwerpuncts, wenn darin die ganze

Masse der Platte vereinigt gedacht wird. Die Richtung dieser Mittelkraft ist OG und der Schwerpunct G ist ihr Angriffspunct.

Um die Centrifugalkraft für irgend einen Körper zu finden, kann man denselben senkrecht zur Drehaxe in lauter plattenförmige Elemente zerlegen, deren Centrifugalkräfte nach dem Vorigen bekannt sind. Man erhält so eine Anzahl von Kräften, welche sämmtlich, ohne unter einander parallel zu sein, in Normalebenen zur Axe liegen. Legt man durch die Drehaxe zwei auf einander rechtwinkelige Ebenen **MN** und **OP** (Fig. 117) und bezieht die Centrifugalkräfte der plattenförmigen Körpertheile auf diese, so fallen in die Ebene **MN** die Seitenkräfte $f, f_1, f_2 \ldots$, welche, da sie parallel unter einander sind, auch eine ihnen parallele Resultante haben. Ebenso hat die andere in die Ebene **OP** fallende Gruppe von Kräften $k, k_1, k_2 \ldots$ eine gemeinschaftliche Resultante, und es reduciren sich also die sämmtlichen Centrifugalkräfte auf zwei in verschiedenen Normalebenen zur Axe liegende Kräfte, welche nur in dem Falle eine einzige Mittelkraft geben, wo sich durch beide Kraftrichtungen eine Ebene legen läßt. Sind die Componenten der Centrifugalkräfte gegen eine der Ebenen **MN** oder **OP** Null, d. h. fallen sie selbst in die andere, so geben sie offenbar eine einzige Mittelkraft, welche ihrer Summe oder der Centrifugalkraft gleich ist, die der ganzen Masse des Körpers in seinem Schwerpuncte vereinigt entsprechen würde. Denn sind $m, m_1, m_2 \ldots$ die Massenelemente in den Entfernungen $r, r_1, r_2 \ldots$, so ist $(mr + m_1r_1 + m_2r_2 + \ldots) \omega^2$ die Resultante aller dieser parallelen Centrifugalkräfte und da die Summe der Momente $mr + m_1r_1 + m_2r_2 + \ldots$ auch $= MR$ ist, wenn M die ganze Masse und R die Entfernung ihres Schwerpuncts vom Drehpuncte ist, so muß $MR\omega^2$ die Centrifugalkraft des Körpers sein. Dabei ist der Angriffspunct derselben in der nämlichen Entfernung von der Axe wie der Schwerpunct, ohne aber mit diesem zusammen zu fallen. Mit Hülfe der Momente in Bezug auf eine beliebige Normalebene zur Axe

kann leicht die Entfernung des Angriffspunctes auch von dieser Ebene, mithin seine Lage vollkommen bestimmt werden. Alle in Bezug auf die Ebene, welche durch den Schwerpunct und die Drehaxe geht, symmetrische Körper, sowie alle Körper, welche in Bezug auf eine mit der Drehaxe in einer Ebene liegende Gerade symmetrisch sind, befinden sich in diesem Falle. Liegen überdies die Schwerpuncte der sämmtlichen plattenförmigen Elemente wie (Fig. 118) in einer zur Drehaxe **LM** parallelen Linie **AB**, so ist die Centrifugalkraft des Körpers nicht allein der der ganzen im Schwerpuncte vereinigten Masse gleich, sondern es ist der Schwerpunct ihr Angriffspunct selbst, weil sich die Centrifugalkräfte bei gleicher Winkelgeschwindigkeit und gleicher Entfernung von der Drehaxe wie die Massen oder wie die Schwerkräfte verhalten. Dies findet besonders Anwendung auf die Kugel, den Cylinder und alle Rotationskörper, deren Axen der Drehaxe parallel sind. Fällt endlich die Symmetrie-Axe des Körpers noch mit der Drehaxe zusammen, so wird die Centrifugalkraft, d. h. der Druck auf die Axe Null, weil $R = 0$ ist. Eine Axe, welche durch den Schwerpunct eines symmetrischen Körpers geht, wird also gar keinen Druck erleiden. Sind daher Wasserräder, Schwungräder, Räderwerke und dergleichen Maschinentheile gehörig centrirt, so wird die Centrifugalkraft den Zapfendruck nicht vermehren.

Unter die Körper, welche sich durch Normalebenen zur Drehaxe so zerlegen lassen, daß die Schwerpuncte der einzelnen Theile in eine zur Axe parallele Linie fallen, gehören auch Ringstücke. Es ist daher z. B. die Centrifugalkraft einer Radfelge so groß, als ob die Masse derselben in ihrem Schwerpuncte vereinigt wäre, und letzterer ist zugleich der Angriffspunct dieser Kraft

68. Beispiele. — Es giebt eine Menge Erscheinungen im gewöhnlichen Leben, welche sich durch die Centrifugalkraft leicht erklären lassen. Der Bereiter, welcher ein Pferd die Reitschule durchmachen läßt, stellt sich in der Mitte des Kreises auf und hält dasselbe an einem langen

an der Trense befestigten Riemen, nicht blos, um es in der Gewalt zu haben, sondern auch, um so viel als möglich die Wirkung der Centrifugalkraft aufzuheben. Die Kraft, welche er dabei aufwenden muß, ist proportional dem Gewichte des Pferdes und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit. Auf das Pferd übt die Centrifugalkraft einen Druck nach außen, deshalb sieht man es seinen Körper nach innen neigen, um demselben entgegen zu wirken. Diese Neigung ist eine solche, daß ihre Richtung mit der Resultante aus dem Gewichte des Pferdes und seiner Centrifugalkraft zusammenfällt und zwischen den Hufen in der Mitte durchgeht. Sie kann daher leicht gefunden werden, wenn man diesen beiden Kräften proportionale Linien auf die Verticale und die Horizontale durch den Schwerpunct trägt und die Mittelkraft construirt. Ist die Bahn **AB** (Fig. **119**) so geneigt, daß die Mittelkraft senkrecht darauf steht, so wird der ganze Druck **GO** von derselben aufgenommen und es ist das Ausgleiten des Pferdes nach Außen nicht zu befürchten.

Kunstreiter, welche sich im raschen Laufe des Pferdes stehend auf demselben erhalten, neigen ebenfalls ihren Körper so, daß die Resultante ihres Gewichts und ihrer Centrifugalkraft in der Mitte zwischen beiden Füßen durchgeht.

Wenn ein Wagen oder Schlitten die Krümmung einer Straße befährt, so wird dadurch eine Kraft hervorgerufen, welche ihn nach der converen Seite drängt und die Gefahr, daß er umgeworfen werde, wächst mit seinem Gewichte und mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit, während sie mit dem Halbmesser der Krümmung abnimmt. Es ist daher bei Straßen und noch mehr bei Eisenbahnen, auf welchen mit sehr großen Geschwindigkeiten gefahren wird, sehr nöthig, die Halbmesser der Krümmungen möglichst groß zu nehmen. Man wird die Gefahr des Umwerfens auch dadurch sehr vermindern können, daß man an der Krümmung den Straßen eine Neigung von der äußeren nach der innern Seite gibt oder die äußere Schiene einer Eisenbahn höher legt, als die innere. Ist z. B. **S** (Fig. **120**) der

Schwerpunct eines Eisenbahnwagens vom Gewichte Q und v seine Geschwindigkeit in der Krümmung, welche mit einem Halbmesser r beschrieben worden ist, so ist $\frac{Mv^2}{r}$ oder $\frac{Q}{g}\frac{v^2}{r}$ die Centrifugalkraft. Diese giebt mit der Schwere Q zusammen eine Mittelkraft, welche von der durch die Köpfe der Schienen gelegten Linie AB winkelrecht aufgenommen werden muß. Da SR winkelrecht zu AB und SC parallel AD ist, so werden die rechtwinkeligen Dreiecke ABD und SRC ähnlich und

$$SC : CR = BD : AB$$

sein, woraus, wenn man die Spurweite AB mit ω bezeichnet und für $SC = \frac{Qv^2}{rg}$, für $RC = Q$ setzt,

$\frac{Qv^2}{rg} : Q = BD : \omega$ und die Höhe, um welche die äußere Schiene gegen die innere höher liegen muß,

$$BD = \frac{\omega . v^2}{rg}.$$

Häufig werden die Straßen, um den Wasserabzug zu befördern, nach beiden Seiten abschüssig gebaut. Diese Bauart ist aber in den Krümmungen sehr gefahrbringend für denjenigen Wagen, welcher beim Ausweichen gezwungen ist, auf dem äußeren Abhange zu fahren, weil nun nicht allein die Centrifugalkraft, sondern auch noch ein Theil der Schwere mit dahin wirkt, ihn umzuwerfen.

Man hat bemerkt, daß, wenn Wagen mit sehr großen Geschwindigkeiten fahren, die Nägel, mit welchen die Reifen an den Felgen befestigt sind, ausgezogen werden. Dies ist ebenfalls eine Wirkung der Centrifugalkraft, der man begegnen kann, wenn man die Reifen durch Bolzen mit Vorsteckern mit den Radkränzen verbindet.

Bei den Getreidemühlen bewirkt die Centrifugalkraft, daß das durch das Läuferauge einfallende Getreide zwischen Bodenstein und Läufer, welche dasselbe zermalmen, nach dem Umfange der Steine getrieben wird und in den Lauft gelangt.

69. Einfluß der Centrifugalkraft auf die Verhältnisse der Schwere an der Erdoberfläche und auf die abgeplattete Gestalt der Erde. — Bekanntlich vollbringt die Erde in etwas weniger als 24 Stunden eine Umdrehung um ihre Axe und es befinden sich vermöge dieser Bewegung die Körper auf der Erde beständig unter der Wirkung der Centrifugalkraft, welche aber keineswegs an allen Stellen die nämliche ist. Denken wir uns Normalebenen zur Erdaxe gelegt und sogenannte Parallelkreise gezogen, so haben diese Kreise um so kleinere Halbmesser, je näher sie den Polen liegen; die Centrifugalkraft wird daher auch vom Aequator, wo sie am größten ist, nach den Polen hin abnehmen und in den letztern selbst sogar Null sein. Nun ist die Centrifugalkraft jederzeit rechtwinkelig gegen die Drehaxe gerichtet; daraus folgt, daß sie unter dem Aequator der Schwere gerade entgegengesetzt, an jedem andern Orte der Erdoberfläche aber gegen dieselbe geneigt ist, und zwar um so stärker, je größer der Winkel **CMB** (Fig. 121), d. i., je höher die geographische Breite ist. Wenn wir daher die Centrifugalkraft nach den Richtungen **CG** und **CH** in Seitenkräfte zerlegen, so wirkt der Theil **CG** derselben der Schwere entgegen und hebt einen Theil derselben auf. Da nun nicht allein nach den Polen hin die Centrifugalkraft abnimmt, sondern auch diejenige Componente derselben, welche sich auf die Richtung der Schwere beziehen läßt, im Verhältniß zur Centrifugalkraft selbst immer kleiner wird, so folgt daraus, daß die Wirkung der Schwere vom Aequator nach den Polen hin zunehmen, und weil sie an dem Aequator am meisten, an den Polen gar nicht durch die Centrifugalkraft geschwächt wird, dort am kleinsten, hier am größten sein muß. Die andere

Componente **CH** der Centrifugalkraft dagegen bewirkt eine, wenn auch äußerst geringe, Ablenkung der Linie des freien Falls von der Richtung des Erdhalbmessers, welche vom Aequator, wo sie Null ist, nach den Polen hin zunimmt.

Durch die Centrifugalkraft läßt sich auch die Abplattung der Erde an den Polen erklären. Nimmt man nämlich an, die Erde sei eine weiche Masse gewesen, so würde sie, sich selbst überlassen, nach dem Gesetze der Massenanziehung eine Kugel gebildet haben. Da aber durch die Axendrehung derselben Centrifugalkraft entsteht, so brachte diese in der Gegend des Aequators eine Anschwellung hervor, welche eine Abplattung an den Polen zur Folge haben mußte. Man zeigt dies gewöhnlich an einer sogenannten Centrifugalmaschine, welche aus halbkreisförmig gebogenen federharten Messingstreifen (Fig. **122**) besteht, die oben und unten in zwei über eine Axe geschobene Ringe gefaßt sind. Im Zustande der Ruhe geben diese Streifen zusammen die Gestalt einer Kugel; wird aber einer der Ringe um die Axe gedreht, so biegen sich die Streifen in der Mitte nach außen, die Ringe rücken einander näher und die Kugel verwandelt sich in ein Sphäroid.

70. Bewegung eines Körpers in einem verticalen Kreise. — Wenn die Kreisbewegung nicht, wie wir bisher stillschweigend angenommen haben, in einer horizontalen Ebene vor sich geht, so ist auch die Geschwindigkeit und der Druck des Körpers gegen seine Bahn nicht mehr unveränderlich. Der Einfluß, welchen die Schwere ausübt, wenn die kreisförmige Bahn in einer Verticalebene liegt, ist leicht zu ermitteln. Das Gewicht des Körpers (Fig. **123**) läßt sich in zwei Seitenpressungen zerlegen, wovon die eine tangential gerichtet ist und die Bewegung des Körpers beschleunigt oder verzögert, je nachdem derselbe im Herabsinken oder im Steigen begriffen ist, die andere dagegen rechtwinkelig gegen die Bewegung, oder, was dasselbe ist, in die Richtung der Centrifugalkraft fällt und den Druck gegen die Bahn vermehrt oder vermindert, je nachdem sie mit der

Centrifugalkraft gleich oder ihr entgegengesetzt gerichtet ist. Kennt man die Geschwindigkeit eines Körpers in irgend einem Puncte seiner Bahn, so läßt sich mit Hülfe des Princips der lebendigen Kräfte die Geschwindigkeit in irgend einem andern Puncte bestimmen. Ist sie z. B. im untersten Puncte der Bahn v_1 und will man sie für einen um $BC = H$ höher liegenden Punct **A** finden, so hat man die Hälfte des Verlustes $M(v_1^2 - v^2)$ an lebendiger Kraft, d. i. die Arbeitsgröße $\frac{M}{2}(v^2_1 - v^2)$ der Schwere zwischen **A** und **B** dem Producte aus dem Gewichte **P** und der Höhe **H** gleich zu setzen. Man erhält daher, wenn **P** das Gewicht des Körpers ist,

$$\frac{M}{2}(v_1^2 - v^2) = P.H$$

und die Geschwindigkeit im Puncte **A**

$$v = \sqrt{v_1^2 - 2PH}$$

Dieselbe Geschwindigkeit wird der Körper haben, wenn er, auf der andern Seite wieder herabsinkend, in **D** ankommt, weil die Schwere die vorhin absorbirte Arbeitsgröße vom höchsten Puncte **E** an restituirt und aus demselben Grunde wird, wenn **H** wieder Null geworden, also der Körper wieder in **B** angekommen ist, die Geschwindigkeit den Werth v_1 wieder angenommen haben. Man sieht daraus, daß im höchsten Puncte die Geschwindigkeit am kleinsten, im tiefsten Puncte am größten, in gleichen Höhen gleich ist und daß jede Umdrehung eine Periode der Geschwindigkeitsveränderungen umfaßt.

71. Centrifugalkraft eines Körpers, welcher irgend eine Curve durchläuft. Anwendung auf die Wurfbahn einer Bombe. — Für jedes Element einer krummlinigen Bahn, welche ein Körper durch bewegende Kräfte zu durchlaufen gezwungen ist, giebt es einen kleinen Kreisbogen, dessen Krümmung derjenigen des Curven-

elements am nächsten kommt, so daß er damit verwechselt werden darf. Wir können uns daher die krumme Linie, von welcher Beschaffenheit sie auch sein mag, als aus unendlich vielen Kreisbögen, wovon jeder einen andern Halbmesser und einen andern Mittelpunct hat, zusammengesetzt denken, und wollen den jedem Elemente entsprechenden Halbmesser den Krümmungshalbmesser desselben nennen. Wären uns die Krümmungshalbmesser Ac, A_1c_1, A_2c_2... (Fig. 124) und die Lage der Mittelpuncte c, c_1, c_2... aller der kleinen Bögen bekannt, so würden wir ohne Weiteres daraus eine Reihe kleiner Kreisbögen AA_1, A_1A_2... erhalten, deren Längen durch zwei benachbarte Krümmungshalbmesser bestimmt werden könnten und welche zusammen die Curve bildeten. Unter dem Gesichtspuncte nun, daß die Bahn eines Körpers aus lauter kleinen Kreisbögen zusammengesetzt ist, läßt sich die Curve als das Resultat der Wirkungen der bewegenden Kräfte und der Centrifugalkraft betrachten und diese Betrachtungsweise führt uns sowohl auf die Lage der Mittelpuncte, als auch auf die Größe der Halbmesser dieser kleinen Bögen, so daß wir dadurch in den Stand gesetzt werden, die Form der Bahn, welche der Körper durchlaufen muß, zu finden.

Bezeichnen wir nämlich durch P die Resultante AP der bewegenden Kräfte, welche im Puncte A auf den Körper wirken, durch M seine Masse, durch v die Geschwindigkeit, welche er in diesem Puncte nach der Richtung der Tangente AT hat; so wird der Körper, während er, wie wir uns vorstellen, den kleinen Bogen AA_1 durchläuft, seine Geschwindigkeit v beibehalten. Da aber zugleich die Centrifugalkraft ihn vom Mittelpuncte c zu entfernen strebt, so müssen wir eine andere Kraft voraussetzen, welche ihn in gleicher Entfernung von c erhält und der Centrifugalkraft genau gleich und entgegengesetzt gerichtet sein muß. Zerlegen wir daher die bewegende Kraft AP in zwei Seitenkräfte, eine zum Bogen tangentiale Aq und eine andere AT normale, so wird es nur die letztere sein können, welche

die Wirkung der Centrifugalkraft aufhebt. Ist daher r der erste Krümmungshalbmesser, und $Aq = p$, so ist $T = \frac{Mv^2}{r}$ die Centrifugalkraft und zugleich die Componente p der bewegenden Kraft, woraus die Größe des Halbmessers

$$r = \frac{Mv^2}{p}$$

folgt. Was den Mittelpunct anlangt, aus welchem mit diesem Halbmesser der kleine Bogen AA_1 beschrieben werden kann, so ist derselbe, durch die Größe r auf die Normale zur Tangente AT aufgetragen, vollkommen bestimmt, sowie auch die Größe AA_1 durch vt. In der sehr kleinen Zeit t, in welcher der Bogen AA_1 vom Körper durchlaufen wird, verrichtet die bewegende Kraft AP, die wir für die kurze Dauer dieser Zeit als constant betrachten, eine Arbeitsgröße, welche sich, wenn wir durch v_1 die Geschwindigkeit des Körpers in A_1 bezeichnen, durch die halbe Differenz der lebendigen Kräfte $\frac{M}{2}(v_1^2 - v^2)$ ausdrücken läßt. Haben wir nun diese Arbeitsgröße $= K$ gefunden, so erhalten wir aus $K = \frac{M}{2}(v_1^2 - v^2)$ die Geschwindigkeit im Puncte A_1

$$v_1^2 = v^2 + \frac{2K}{M}$$

Aus dem Gesetze, nach welchem die bewegende Kraft sich verändert, erfahren wir die Kraft P_1 im Puncte A_1 und die Componente p_1 derselben, welche in die Normale zur Tangente A_1T_1 fällt und der Centrifugalkraft $T_1 = \frac{Mv_1^2}{r_1^2}$ gleich sein muß. Indem wir daher

$$P_1 = \frac{Mv_1^2}{r_1}$$

setzen, erhalten wir den zweiten Krümmungshalbmesser

$$r_1 = \frac{Mv_1^2}{P_1}$$

für den Bogen A_1A_2. Aus v_1t folgt ferner die Größe des Bogens A_1A_2 und aus der halben Differenz der lebendigen Kräfte Mv_1^2 und Mv_2^2 in A_1 und A_2 die Arbeitsgröße $K_1 = \frac{M}{2}(v_2^2 - v_1^2)$, welche die Geschwindigkeit v_2 im Puncte A_2 zu

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2K_1}{M}$$

ergiebt. Aus der bewegenden Kraft P_2 in A_2 findet sich nun weiterhin die der Centrifugalkraft $\frac{Mv_2^2}{r_2}$ gleiche Componente derselben, hieraus der dritte Krümmungshalbmesser, die Größe des zugehörigen Bogens u. s. f., so daß sich nach und nach die ganze Bahn des Körpers drrch abwechselndes Rechnen und Construiren finden läßt.

Man hat diese Methode hauptsächlich auf die Bewegung der Geschützkugeln angewendet und wir wollen behufs eines Beispiels durch sie die Wurfbahn einer Bombe finden. Wie im §. 54 werden wir dabei den Luftwiderstand in Rechnung ziehen und voraussetzen, daß derselbe bei verschiedenen Geschwindigkeiten eines und desselben Kalibers aus einer nach Versuchen zusammengestellten Tabelle bekannt sei. AT (Fig. 125) sei die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v, M die Masse, P das Gewicht der Bombe. In den ersten Zeittheilchen, welche wir überhaupt sehr klein, etwa $\frac{1}{10}$ Secunde annehmen, ist die Ablenkung der Bombe von der Richtung AT so gering, daß dieselbe von dieser Richtung so gut wie gar nicht abweicht, und der Widerstand der Luft die einzige bewegende Kraft ist, welche die Geschwindigkeit verändert. Hat man demnach den Luftwiderstand w für die Anfangsgeschwindigkeit aus der Tabelle entnommen, so kann man daraus den ihm entsprechenden kleinen Ge-

schwindigkeitsgrad $\frac{w.t}{M}$ für die kleine Zeit t und die Geschwindigkeit, welche der Bombe am Ende derselben verbleibt, berechnen. Zu dieser Geschwindigkeit gehört ein neuer Luftwiderstand, aus welchem man wieder den zugehörigen Geschwindigkeitsgrad im zweiten Zeittheilchen und die Geschwindigkeit der Bombe am Ende desselben finden kann. Fährt man so fort, so erhält man den ersten geradlinigen Theil der Wurfbahn, in welchem der Körper von A nach B_1 gelangt. Sei nun T die seit dem Anfange der Bewegung bis hierher verflossene Zeit, in welcher $g\frac{T^2}{2}$ einen gegen die Geschwindigkeit in der Richtung AT nicht mehr unmerklichen Werth angenommen hat, und zieht man durch B_1 eine Vertikale, auf welche man $A_1B_1 = \frac{gT^2}{2}$ aufträgt, so ist A_1 ein Punct der Curve, welcher nun nicht mehr in der Linie AT liegt. Von hier an läßt sich die Bahn aus Kreisbögen zusammensetzen, deren Halbmesser und Mittelpuncte aus der Centrifugalkraft, der Schwere, dem Luftwiderstande und der Geschwindigkeit in A_1, welche wegen der Kleinheit von A_1B_1 der in B_1 gleichgesetzt werden kann, bestimmen lassen. Bezeichnet nämlich v_1 die Geschwindigkeit in B_1 oder A_1, r_1 den Krümmungshalbmesser des ersten kleinen Kreisbogens, so ist die Centrifugalkraft $\frac{Mv_1^2}{r_1}$, und trägt man auf A_1B_1 von A_1 aus eine dem Gewichte der Bombe proportionale Linie auf, welche man in zwei Componenten, eine zur Curve tangentiale A_1q und eine zur Tangente normale A_1p zerlegt, so ist $A_1p = p$ die Kraft, welche die Bombe in der Cure erhält, und welche der Centrifugalkraft gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Wir erhalten demnach

$$p = \frac{Mv_1^2}{r_1}$$

und den ersten Krümmungshalbmesser

$$A_1 c_1 = r_1 = \frac{M v_1^2}{p},$$

mit welchem der Bogen $A_1 A_2$ beschrieben werden muß. Die Länge dieses Bogens bestimmt sich aus der Geschwindigkeit v_1 und dem gewählten Zeitelemente t. Während die Bombe den Bogen $A_1 A_2$ zurücklegt, verändern die Componente $A_1 q = q$ des Gewichtes und der Luftwiderstand die Geschwindigkeit derselben, und wenn wir den letztern während dieses Weges constant annehmen, und die Größe, welche ihm der Tabelle zufolge bei der Geschwindigkeit v_1 entspricht, mit w_1 bezeichnen, so ist nach dem Principe der lebendigen Kräfte die Geschwindigkeit u im Puncte A_2 durch

$$M v_1^2 - M u^2 = 2 A_1 A_2 (w_1 + q)$$ gegeben und zwar

$$u = \sqrt{v_1^2 - \frac{2 \cdot A_1 A_2 (w_1 + q)}{M}}$$

Streng genommen, kann aber der Widerstand der Luft, weil die Geschwindigkeit abnimmt, nicht constant geblieben sein, er wird vielmehr kleiner geworden sein und u wird die Geschwindigkeit in A_2 etwas zu klein angeben. Setzt man aber an die Stelle des Luftwiderstandes w_1 für die Geschwindigkeit v_1 den der Geschwindigkeit u entsprechenden Werth w_2 desselben, so erhält man einen neuen Ausdruck für die Geschwindigkeit in A_2

$$u_1 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2 \cdot A_1 A_2 (w_2 + q)}{M}}$$

welcher dieselbe wieder etwas zu groß giebt, weil w_2 zu klein angenommen worden ist. Hinreichend scharf erhält man nun durch das arithmetische Mittel aus u und u_1 die wahre Geschwindigkeit $v_2 = \frac{u + u_1}{2}$ am Ende des Bogens $A_1 A_2$.

Hat man hierzu wieder die gegen die Curve normale Componente p_1 des Gewichts aufgesucht, so folgt aus $r_2 = \frac{M v_2^2}{p_1}$

der zweite Krümmungshalbmesser, mit welchem der folgende Bogen beschrieben wird. Aus der tangentialen Componente q_1 und dem der Geschwindigkeit v_2 entsprechenden Luftwiderstande erhält man die Geschwindigkeit v_3 wie oben u. s. f. die übrigen Krümmungshalbmesser. Im höchsten Puncte L der Bahn wird dann die Tangentialkraft Null und weiterhin beim Wiederherabsinken der Bombe nimmt dieselbe nach und nach wieder zu und ist dabei der Bewegung günstig. Sie beschleunigt dieselbe im niedersteigenden Zweige der Curve, während sie im aufsteigenden Zweige in Verbindung mit dem Luftwiderstande eine Verzögerung der Bewegung hervorbrachte. Diese Beschleunigung wird endlich so groß, daß die Bahnlinie immer mehr und mehr der Vertikalen sich nähert und das Ende der Bahn beinahe wie durch den freien Fall zurückgelegt wird.

VIII.

Das Pendel. — Stoß eines Körpers, der sich um eine Axe dreht.

72. Pendelbewegung. — Unter einem Pendel versteht man im Allgemeinen einen festen Körper von beliebiger Gestalt, welcher an einer horizontalen Axe aufgehängt ist; in der Regel besteht dasselbe aus einer Stange oder einem Faden, am obern Ende befestigt, am untern mit einem schweren Körper versehen. Wenn dasselbe eine solche Lage einnimmt, daß der Schwerpunct **G** (Fig. **126**) und der Aufhängepunct **A** in der nämlichen Vertikallinie liegen, so befindet sich's im Zustande des stabilen Gleichgewichts. Wird es aber von dieser vertikalen Lage abgelenkt und dann sich selbst überlassen, so nimmt es um dieselbe eine schwingende Bewegung an, welche durch den Widerstand der Luft und die Reibung im Aufhängepuncte immer schwächer und schwächer wird. Vorzüglich ist der Luftwiderstand ein Hinderniß für die Pendelbewegung und um den Einfluß desselben zu vermindern, giebt man dem schweren Körper die Form einer Linse, deren scharfer kreisförmiger Rand in die Bewegungsebene des Schwerpuncts fällt.

Um die Betrachtung der Pendelbewegung zu erleichtern, wollen wir uns zunächst dasselbe, als aus einer festen, gewichtslosen Linie und einem schweren materiellen Puncte am Ende derselben bestehend, vorstellen, und später von diesem **einfachen** (mathematischen) auf das aus einem Systeme **von Körpern bestehende zusammengesetzte** (physische)

Pendel schließen. Jedes ausgeführte Pendel ist ein zusammengesetztes; man wird aber dem Begriffe des einfachen ziemlich nahe kommen, wenn man dasselbe aus einem dünnen Faden und einer kleinen schweren Kugel bestehen läßt. Bringt man das einfache Pendel aus seiner Lage des Gleichgewichts **AB** (Fig. 127) in die Lage **AC**, und überläßt man es nun seiner Schwere, ohne ihm weiter eine Geschwindigkeit zu ertheilen, so wird der schwere Punct in einem Kreisbogen von **C** nach **B** herabsinken. In diesem Puncte wird der Körper aber nicht zur Ruhe kommen, sondern vermöge der Geschwindigkeit, welche er auf dem Wege **CB** angenommen hat, und welche so groß ist, als ob er von **D** nach **B** frei herabgefallen wäre, wieder auf der entgegengesetzten Seite seine Bewegung fortsetzen, bis seine Geschwindigkeit Null geworden ist. Dies wird, wenn wir alle Widerstände bei Seite setzen, offenbar der Fall sein in dem Augenblicke, wo er in C_1, d. i. auf gleicher Höhe mit **C** angekommen ist. Indem der Körper nun wieder die Lage des stabilen Gleichgewichts einzunehmen strebt, wird er sich rückwärts von C_1 nach **B** bewegen, im letztern Puncte wieder seine größte Geschwindigkeit erreichen, durch diese sich auf der linken Seite wieder bis **C** erheben und unaufhörlich fortfahren, hin und herzuschwingen. Jeden Hin- oder jeden Rückgang des Pendels nennt man eine *Schwingung* und seine größte Abweichung von der Vertikale oder den Winkel $CAB = C_1AB$ den *Elongationswinkel*.

73. Schwingungszeit eines einfachen Pendels. — Für viele Aufgaben der Mechanik ist es unerläßlich, die Schwingungszeit eines Pendels von gegebener Länge zu kennen. Wir wollen zu dem Behufe annehmen, das Pendel von der Länge **l** sei aus der ursprünglichen Lage **AC** (Fig. 128) nach **AM** gekommen und der materielle Punct **M** bewege sich von da an in dem Zeitelemente τ durch den kleinen Bogen $MN = s$. Bezeichnet $PM = y$ die Vertikalprojection des vorher durchlaufenen Weges **CM**, so ist seine Geschwindigkeit im Punete **M** durch $v = \sqrt{2g \cdot y}$

bestimmt und da wir für den kleinen Bogen s oder für das Zeitelement τ die Bewegung als gleichförmig betrachten können, so wird $s = v\tau = \tau \sqrt{2g \cdot y}$ und

$$\tau = \frac{s}{\sqrt{2g \cdot y}}$$ sein.

Indem wir das Bogenelement MN als gerade, auf AM normale, Linie ansehen dürfen, erhalten wir aus den Dreiecken MNQ und AME die Proportion
$MN : QN = AM : ME$ oder $s : QN = l : ME$, d. i.

$$s = \frac{QN \cdot l}{ME}$$

und da ME die mittlere Proportionale aus BE und $2l - BE$, d. h. $ME = \sqrt{(2l - BE)\ BE}$ ist, so folgt

$$s = \frac{QN \cdot l}{\sqrt{(2l - BE)\ BE}}$$

Beschreiben wir jetzt über BD als Durchmesser einen Halbkreis DmB und ziehen wir durch die Puncte M und N Horizontalen, welche denselben in m und n schneiden, ferner den Halbmesser $Om = \frac{BD}{2} = \frac{b}{2}$ und die Linie $nq = NQ$, so ist, wenn man wieder das Bogenelement mn als gerade zu Om normale Linie betrachtet,

$$mn : qn = Om : Em \text{ oder } mn : QN = \tfrac{b}{2} : Em$$

und $$QN = \frac{2mn \cdot Em}{b}$$

Ferner ist Em die mittlere Proportionale aus BE und ED, d. i.

$Em = \sqrt{BE \cdot DE} = \sqrt{BE \cdot PM} = \sqrt{BE \cdot y}$, folglich

$$QN = \frac{2 \cdot mn \sqrt{BE \cdot y}}{b}$$

Durch Substitution dieses Werthes in die obige Gleichung für s erhält man

$$s = \frac{2mn \cdot l \sqrt{BE \cdot y}}{b \sqrt{(2l - BE)\, BE}} = \frac{2 \cdot mn \cdot l \sqrt{y}}{b \sqrt{(2l - BE)}}$$

und wenn man diesen Ausdruck in die Gleichung für das Zeitelement τ einsetzt und hierauf Zähler und Nenner durch $\sqrt{\frac{l}{2}}$ dividirt,

$$\tau = \frac{2mn}{b} \cdot \frac{l \sqrt{y}}{\sqrt{2g \cdot y}\ \sqrt{2l - BE}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{mn}{\sqrt{1 - \frac{BE}{2l}}},$$

die Zeit, in welcher der kleine Bogen MN durchlaufen wird.

Denkt man sich nun den Bogen CB auf die Weise in Elemente getheilt, daß die denselben gegenüberliegenden Elemente des Halbkreises BmD alle von gleicher Größe sind und bezeichnet man ihre Anzahl drrch n, so ist

$mn \cdot n = Om\pi$ und $mn = \frac{b\pi}{n}$, und nimmt man überhaupt Elongationswinkel sehr klein an, so wird BE gegen 2l so klein, daß $\frac{BE}{2l}$ gegen die Einheit vernachläßigt und

$\sqrt{1 - \frac{BE}{2l}} = 1$ gesetzt werden kann. Man erhält dann die Zeit, welche nöthig ist, den Bogen MN oder irgend eines der andern Bogenelemente zu durchlaufen,

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{b\pi}{2nb} = \frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{l}{g}},$$

so daß die Dauer einer halben Pendelschwingung

$$n \cdot \frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

und die einer vollen Schwingung

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$ *),

*) Um die Schwingungszeit in aller Schärfe und auch für größere Elongationswinkel zu erhalten, hatte man den Factor $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{BE}{2l}}}$ nicht vernachläßigen dürfen, sondern in die sämmtlichen Ausdrücke für die aufeinander folgenden Zeitelemente den der Größe BE entsprechenden Werth, d. i. den jedesmaligen Vertikalbestand des Körpers vom tiefsten Puncte B einsetzen müssen. Die Summirung aller der Zeitelemente, welche sich auf elementarem Weg ein der Kürze nicht leisten läßt, giebt für die ganze Dauer einer Pendelschwingung

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{b}{2l} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2l}\right)^3 + \ldots\right\} = \alpha\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$ Ist aber der Elongationswinkel, wie wir angenommen haben, klein, so ist $\frac{b}{2l}$ ein so kleiner Werth, daß sich die Reihe α auf 1 reducirt. Selbst für Elongationswinkel über 15° und sehr genaue Rechnungen reicht es meistens hin, die ersten beiden Glieder der Reihe zu nehmen und $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{b}{8l}\right)$ zu setzen. Für einen Winkel von 15° z. B. erhält man mit Hülfe der vier ersten Glieder $t = 1{,}0043695\ \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, durch die ersten zwei $t = 1{,}0042592\ \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ und bei Vernachläßigung von α nur $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Der Fehler beträgt also im zweiten Falle 0,0001103

weil gleichliegende Bogenstücke zu beiden Seiten der Vertikalen AB mit gleichen Geschwindigkeiten oder in gleichen Zeiten durchlaufen werden.

Unter der Voraussetzung also, daß die Elongationswinkel klein sind, finden wir die Zeit einer Pendelschwingung unabhängig von diesem Winkel; die Schwingungen eines und desselben Pendels werden daher, wenn dasselbe nur wenig von der Vertikalen abgelenkt wird, von gleicher Dauer oder isochron sein. Diese Eigenschaft, welche das Pendel zu einem vortrefflichen Instrumente für genaue Messung und Eintheilung der Zeit macht, wird bei den Uhren zur Hervorbringung einer gleichförmigen Bewegung mit dem besten Erfolge benutzt.

Da sich die Geschwindigkeit g eines frei fallenden Körpers am Ende der ersten Secunde sowohl mit der geographischen Breite als auch mit der Entfernung vom Erdmittelpuncte ändert, so werden auch die Schwingungszeiten bei gleichen Pendellängen oder die Pendellängen bei gleichen Schwingungszeiten an verschiedenen Orten der Erdoberfläche verschieden sein. Bezeichnet nämlich t_1 die Schwingungszeit eines Pendels von der Länge l_1 an einem zweiten Orte, wo die Beschleunigung g_1 ist, so erhält man

$$t : t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{l_1}{g_1}}.$$

Sind die Pendellängen l und l_1 gleich, so wird $t : t_1 = \sqrt{g_1} : \sqrt{g}$ oder $g_1 : g = t^2 : t_1^2$, d. h. die Schwingungszeiten verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Beschleunigungen oder die Beschleunigungen umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten.

Sind die Schwingungszeiten t und t_1 zweier Pendel an verschiedenen Orten gleich, so ist $g : g_1 = l : l_1$, d. h.

---

vom Ganzen oder auf 100 00 Schwingungen ungefähr 11, im letzten Falle 0,0043695 oder etwa 437 auf 100000 Schwingungen.

die Beschleunigungen sind an diesen beiden Orten den Längen derjenigen Pendel proportional, welche in gleichen Zeiten gleichviel Schwingungen machen.

Ein Pendel, dessen Schwingungszeit eine Secunde dauert, für welches also $1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ist, heißt ein Secundenpendel und die Länge desselben ist $l = \frac{g}{\pi^2}$. Für Paris z. B. ist $g = 9{,}8088\ \frac{m}{}$, folglich die Länge des Secundenpendels $l = \frac{9{,}8088}{(3{,}1416)^2}\ m = 0{,}9938$. Da es aber viel leichter ist, durch direkte Versuche die Länge des Secundenpendels oder überhaupt die Schwingungszeit eines beliebigen Pendels zu finden, als den Werth g, so benutzt man häufig die Pendelbeobachtungen, um für verschiedene Orte die Fallgeschwindigkeit g zu berechnen. Kennt man die Schwingungszeit t eines Pendels von der Länge l, so ist $g = \frac{\pi^2 l}{t}$ und schlägt das Pendel Secunden, $g = \pi^2 l$.

74. Zusammengesetztes Pendel. — Um das Bewegungsgesetz des zusammengesetzten Pendels zu finden, sei (Fig. 129) ein um eine horizontale Axe **A** drehbarer Körper von der Masse **M** und dem Gewichte **P**, **S** sein Schwerpunct und die Entfernung desselben vom Drehpuncte $AS = a$; ferner sei S_1 die Lage des Schwerpuncts in dem Augenblicke, wo der Körper von **AS** nach AS_1 herabsinkend, die Winkelgeschwindigkeit ω erreicht hat, und $PS_1 = y$ der senkrechte Abstand zwischen **S** und S_1; endlich **T** das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe **A**.

Die mechanische Arbeit des Körpers, welcher von der Höhe $PS_1 = y$ herabgesunken ist, beträgt $Py = Mgy$ und die lebendige Kraft, welche er in S_1 erlangt hat, $\omega^2 . T$.

Es ist daher

$$\omega' . T = 2Mg . y.$$

Bewegt sich der Punct S_1 noch um einen kleinen Bogen S_1S_2 fort und braucht er dazu die kleine Zeit τ, so ist $AS . \omega = a . \omega$ die Geschwindigkeit, welche wir für das Element S_1S_2 gleichförmig annehmen können, so daß $a . \omega . \tau = S_1S_2$ und

$$\omega = \frac{S_1S_2}{a\tau}, \text{ folglich}$$

$$\left(\frac{S_1S_2}{a\tau}\right)^2 \cdot T = 2Mg . y$$

ist. Während der Schwerpunct den Bogen SS_1S_2 zurücklegt, beschreibt ein Punct in der Lineareinheit As von der Axe entfernt, einen ähnlichen Bogen und wenn für den letztern s_1s_2 mit s_1 und ps_1 mit y_1 bezeichnet wird, so ist

$$\frac{S_1S_2}{s_1s_2} = \frac{PS_1}{ps_1} = \frac{AS}{1} \text{ oder } \frac{S_1S_2}{s_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{a}{1},$$

woraus $S_1S_2 = as_1$ und $y = ay_1$ folgt. Führt man diese Werthe in die obige Gleichung ein, so wird

$$\frac{a^2s_1^2}{a^2\tau^2} . T = 2Mg . ay_1, \text{ oder}$$

$$\sqrt{\frac{Ma}{T}} . \tau = \frac{s_1}{\sqrt{2g . y_1}}$$

Nehmen wir nun (Fig. 130) AsB als den Bogen an, welchen der um die Längeneinheit $As_1 = l_1 = 1$ entfernte Punct durchläuft, und wiederholen wir in Bezug auf diesen und den Halbkreis BmD ganz dieselben Schlüsse, wie im vorigen Paragraphen, indem wir dabei die Elongationswinkel klein voraussetzen und BD mit b_1 bezeichnen, so erhalten wir für $\frac{s_1}{\sqrt{2g . y_1}}$ zunächst

$\sqrt{\frac{l_1}{g}} \cdot \frac{1}{b_1} \cdot mn$ oder, weil $l_1 = 1$ ist, $\sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \frac{mn}{b_1}$

und $\sqrt{\frac{Ma}{T}} \cdot \tau = \sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \frac{mn}{b_1}$, woraus

$$\tau = \frac{mn}{b_1} \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{T}{Ma}} \text{ folgt.}$$

Um die Summe der sämmtlichen Zeitelemente zur Durchlaufung des ganzen Bogens SS_1B, also die Dauer einer halben Schwingung zu finden, brauchen wir nur alle Werthe, welche mn in den aufeinander folgenden Zeittheilchen annimmt, zu summiren. Diese Summe ist $\frac{BD \cdot \pi}{2}$

oder in Bezug auf Fig. 129 $\frac{b_1 \pi}{2}$ und demnach die Dauer der halben Schwingung eines materiellen Pendels

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{g}} \sqrt{\frac{T}{Ma}}$$

oder die einer vollen Schwingung

$$t = \pi \sqrt{\frac{T}{Mag}} \text{ *)}$$

75. Beziehung des zusammengesetzten Pendels zum einfachen — Mittelpunct des Schwunges. — Denkt man sich dem materiellen Pendel ein einfaches gegenüber, welches mit demselben gleiche Schwingungen macht, so muß

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{1}{g}} \sqrt{\frac{T}{Ma}}$$

*) Auch dieser Ausdruck muß für größere Elongationswinkel und für sehr scharfe Rechnungen mit dem Factor α der vorigen Note multiplicirt werden.

sein und die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem Körpersysteme des zusammengesetzten gleiche Schwingungszeit hat,

$$l = \frac{T}{Ma}$$

In dieser Entfernung von der Drehaxe kann man sich die ganze Masse des Pendels vereinigt denken und dasselbe dann als ein einfaches betrachten, ohne daß eine andere Bewegung entsteht, als die des zusammengesetzten. Da die Größe $l = \frac{T}{Ma}$ nur der Halbmesser eines um die Axe beschriebenen Kreises ist, so ist durch dieselbe eigentlich nicht die Lage eines bestimmten Punctes gegeben. Allein man stellt sich gewöhnlich die Länge $l = AO$ auf die durch die Drehaxe und den Schwerpunct gehende Linie aufgetragen vor, und nennt den dadurch bestimmten Punct den Mittelpunct des Schwunges oder den Schwingungspunct *).

Drückt man das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe A nach §. 64 durch das Trägheitsmoment T_1 desselben

---

*) Dieser Punct darf nicht mit einem anderen verwechselt werden, welchen man zuweilen auch den Schwingungspunct nennt. In §. 58 nämlich fanden wir die lebendige Kraft eines Körpers, welcher sich um eine Axe dreht und dessen Elemente $m, m_1 \ldots$ in den Entfernungen $r, r_1 \ldots$ von der Axe sich befinden, $\omega^2 (mr^2 + m_1 r_1^2 + ..) = T \cdot \omega^2$. Stellt man sich nun die ganze Masse in der Entfernung R von der Drehaxe vereinigt vor, und soll der Körper alsdann bei derselben Winkelgeschwindigkeit ω noch die nämliche lebendige Kraft haben, so muß $MR^2\omega^2 = T \cdot \omega^2$, d. h. $R = \sqrt{\frac{T}{M}}$ sein. Irgend ein Punct in dieser Entfernung von der Drehaxe heißt bei Manchen auch der Schwingungspunct, bei Anderen der Mittelpunct der Trägheit oder der Masse.

Körpers für eine durch den Schwerpunct S gehende und der vorigen parallele Axe aus, so wird

$$T = T_1 + Ma^2$$

und

$$l = \frac{T_1 + Ma^2}{Ma} = a + \frac{T_1}{Ma}$$

Wird nun das Pendel umgekehrt, so daß der Schwingungspunct O jetzt zum Aufhängepuncte wird, so erhält man für den neuen Schwingungspunct

$l_1 = a_1 + \frac{T_1}{Ma_1}$, wo a_1 die Entfernung $OS = l - a$ bezeichnet. Da nun nach der vorhergehenden Gleichung

$$a_1 = l - a = \frac{T_1}{Ma}$$ ist, so folgt

$$l_1 = l - a + \frac{T_1 . Ma}{MT_1} = l,$$

d. h. der Aufhängepunct des physischen Pendels wird zum Mittelpuncte des Schwunges, wenn jener zum Aufhängepuncte genommen wird, und in beiden Fällen hat das Pendel gleiche Schwingungszeit. Man kann daher auch die Länge des einfachen, gleichzeitig schwingenden Pendels finden, wenn man das zusammengesetzte Pendel so einrichtet, daß die Aufhängepuncte verwechselt werden können, und wenn man durch Versuche diejenigen zusammengehörigen beiden Aufhängepuncte bestimmt, bei welchen die Schwingungszeiten gleich sind. Ein solches Pendel heißt ein Reversionspendel.

Die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{T}{Ma . g}} = \pi \sqrt{\frac{T}{Pa}}$ kann auch, wenn man die Schwingungszeit t beobachtet hat, und das Gewicht, sowie die Lage des Schwerpuncts kennt, dazu

dienen, die Trägheit des Körpers in Bezug auf die Drehaxe zu finden, indem

$$T = P : a \left(\frac{t}{\pi}\right)^2$$

ist.

76. Mittelpunct des Stoßes. — Ist MNQ (Fig. 131) ein um eine zur Bildebene normale Axe drehbarer Körper, φ der ihm in dem Zeitelemente t ertheilte Zuwachs von Winkelgeschwindigkeit, T sein Trägheitsmoment, so ist nach §. 61 das Moment der Trägheitskräfte der Massentheile des Körpers

$$F \cdot R = \varphi \frac{T}{t},$$

wo F eine mit der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Drehaxe im Gleichgewichte stehende Kraft und R ein Perpendikel aus der Axe auf dieselbe ist.

Um die Kraft F, die Resultante aller Trägheitskräfte der Massenelemente m, m_1, m_2 ... zu bestimmen, mögen r, r_1, r_2 ... deren Abstände von der Drehaxe, x, x_1, x_2 .. und y, y_1, y_2 die Coordinaten derselben gegen zwei rechtwinkelige Axen sein, welche in der durch den Schwerpunct gehenden und zur Drehaxe normalen Bildebene liegen, in die wir uns die sämmtlichen Massentheile parallel mit der Drehaxe transportirt denken. Die Trägheitskraft jedes Elementes giebt gegen diese Axen zwei Componenten, z. B. die der Masse m die Seitenkräfte $mr \frac{\varphi}{t} \cdot \frac{x}{r} = mx \cdot \frac{\varphi}{t}$ und

$mr \cdot \frac{\varphi}{t} \cdot \frac{y}{r} = my \cdot \frac{\varphi}{t}$. Zerlegt man so die Trägheitskräfte aller Massenelemente, bezeichnet durch a, X und Y die Abstände des Schwerpuncts von der Drehaxe und den andern beiden Axen, und nimmt die Summe der gleichgerichteten Componenten, so erhält man

$\frac{\varphi}{t}(mx + m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots) = \frac{\varphi}{t} \cdot MX$ und

$\frac{\varphi}{t}(my + m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots) = \frac{\varphi}{t} \cdot MY$

und die Resultante aller Trägheitsmomente

$$\sqrt{\left(\frac{\varphi}{t}\right)^2 M^2X^2 + \left(\frac{\varphi}{t}\right)^2 M^2Y^2}$$

$$= \frac{\varphi}{t} M \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\varphi}{t} \cdot Ma.$$

Aus den Verhältnissen $\frac{X}{a}$ und $\frac{Y}{a}$ der beiden Componenten zu ihrer Resultante ergiebt sich ferner, daß letztere mit der Axe **DE** denselben Winkel einschließt, wie **a** mit der Axe **BC**, daß folglich die Mittelkraft normal zu **a** oder zu der durch die Axe und den Schwerpunct gehenden Linie **MQ** ist. Indem wir daher für **F** den Werth $\frac{\varphi}{t}$. **Ma** einsetzen dürfen, wird $\frac{\varphi}{t} . Ma . R = \frac{\varphi}{t} . T$ oder

$$Ma . R = T \text{ und } R = \frac{T}{Ma}$$

der Abstand des Angriffspunctes dieser Kraft von der Drehaxe.

Es giebt demnach in der durch die Drehaxe und den Schwerpunct des Körpers gehenden Ebene einen Punct, welcher die Eigenschaft besitzt, daß, wenn in demselben eine der Trägheitskraft des Körpers gerade entgegengesetzte Kraft angreift, dieselbe Wirkung hervorgebracht wird, als ob die Gesammtheit der Trägheitskräfte, in ihm vereinigt, der Kraft entgegenträte. Eine auf diesen Punct und der Bewegung entgegen gerichtete Kraft wird daher diese letztere vollständig aufheben können, und so, daß außerdem kein Druck in einer andern Richtung, also auch keine Rückwirkung auf die Axe entsteht, gleich als ob der Körper sich frei bewegte. Trifft

der schwingende Körper mit diesem Puncte auf ein festes Hinderniß, so verliert er alle Bewegung. Wirkt dagegen die Kraft auf einen andern Punct, so wird das Bestreben dieser und der Trägheit, den Körper zu biegen, einen Druck auf die Axe erzeugen. Mann nennt diesen Punct eines schwingenden Körpers, welcher eine gegen ihn gerichtete Kraft, also auch den Stoß eines andern Körpers vollständig aufzunehmen vermag, den Mittelpunct des Stoßes.

Schlägt man mit einem Stabe auf eine unbewegliche Kante, so wird man einen plötzlichen Ruck in der Hand empfinden, wenn es nicht der Mittelpunct des Stoßes ist, mit welchem der Stab die Kante trifft. Ist aber der aufschlagende Punct zugleich Mittelpunct des Stoßes, so fällt der prellende Schlag in der Hand weg. Dies ist der Fall, wenn man den Stab bei einem Ende faßt und, indem man aus dem Handgelenke schlägt, bei $\frac{2}{3}$ seiner Länge auf die Kante trifft; denn nach §. 63 ist das Trägheitsmoment einer Stange von der Länge **l**, welche sich um ihre Ende

dreht, $T = \frac{l^2}{3} M$, das statische Moment $Ma = M \cdot \frac{l}{2}$,

folglich $R = \frac{2l}{3}$.

Besonders beim Hämmern ist der Mittelpunct des Stoßes von großer Wichtigkeit, und es ist nothwendig, daß ein Hammer mit diesem Puncte aufschlage, damit nicht ein für das Hammergerüste verderblicher Stoß auf die Zapfen entstehe. Da der Kopf der bei Weitem schwerste Theil eines Hammers ist, so wird das Trägheitsmoment desselben nicht sehr von **Ma** abweichen, so daß **R** nahe gleich **a** ist, d. h. der Mittelpunct des Stoßes schon von selbst nahe an den Schwerpunct des Kopfes und in den Bereich der Hammerbahn fällt. Man kann auf dem Wege des Versuches leicht die Lage dieses Punctes an einem Körper finden, wenn man denselben auf eine längs einer Horizontalebene verschiebbare Kante

wiederholt fallen läßt, bis der Drehpunct keine Erschütterung mehr erfährt.

Da die Massenelemente des Körpers MNQ nicht, wie wir vorausgesetzt hatten, alle in einer zur Drehaxe normalen Ebene liegen können, so ist durch den Ausdruck $R = \frac{T}{Ma}$ nur der Abstand einer den Mittelpunct des Stoßes enthaltenden und zur Drehaxe parallelen Linie in der durch diese und den Schwerpunct gelegten Ebene gegeben, keineswegs aber die Lage dieses Punctes vollkommen bestimmt. Sucht man demnach die Momente der Trägheitskräfte sowohl der Massenelemente, als auch der ganzen Masse in Bezug auf eine beliebige Normalebene zur Drehaxe, so erhält man durch Gleichsetzung derselben auch die Entfernung des Mittelpuncts des Stoßes von dieser Ebene.

Nach §. 75 ist $R = \frac{T}{Ma}$ auch die Entfernung des Schwingungspunctes von der Drehaxe; allein der Mittelpunct des Stoßes ist, wie wir oben sahen, ein Punct von ganz bestimmter Lage, während es bei dem Schwingungspuncte blos auf die Entfernung von der Axe ankommt. Nur wenn man den Schwingungspunct in dem durch den Schwerpunct gehenden Perpendikel zur Axe annimmt, kann in besonderen Fällen, z. B. bei Körpern, welche in Bezug auf eine Normalebene zur Drehaxe und durch den Schwerpunct, symmetrisch sind, der Mittelpunct des Stoßes als identisch mit dem Schwingungspuncte betrachtet werden *).

---

*) Sind K, K_1, K_2 (Fig. 132) drei mit der Axe AB durch gewichtslose Linien verbundene und als mathematische Puncte gedachte Kugeln, deren Massen sich wie 1 : 4 : 3 verhalten und deren gegenseitige Lage durch die Linien AB = 5, AC = 12, AK = 4, $BK_1 = 2$, $CK_2 = 6$ gegeben ist, so ist das Trägheitsmoment dieses Systems

$$T = 1 . 16 + 4 . 4 + 3 . 36 = 140$$

Aus der Gleichheit der Abstände beider Puncte von der Drehaxe folgt auch, daß dann, wenn man die Drehaxe parallel mit sich selbst durch den Mittelpunct des Stoßes verlegt, die vorige Drehaxe den neuen Mittelpunct des Stoßes enthalten wird. Man wird daher auch einen Stab bei $\frac{2}{3}$

---

und das statische Moment

$$Ma = 1.4 + 4.2 + 3.6 = 30, \text{ mithin } R = \frac{140}{30} = \frac{14}{3}$$

Der Schwingungspunct und der Mittelpunct des Stoßes liegen also in der Entfernung $\frac{14}{3}$ von der Axe. Der Abstand des Schwingungspunctes von einer z. B. der durch A gelegten, Normalebene zur Axe ist gleichgiltig und ohne Einfluß auf die Schwingungsdauer. Nimmt man ihn aber in dem durch den Schwerpunct S gehenden Perpendikel zur Drehaxe an, wie es häufig geschieht, so würde seine Entfernung von der Ebene AD hier $DO = \frac{4.5 + 3.12}{1 + 4 + 3} = 7$ sein. Die Momente der Trägheitskräfte der drei Kugeln in Bezug auf die nämliche Ebene sind $\frac{\varphi}{t}.1.4.0$, $\frac{\varphi}{t}.4.2.5$, $\frac{\varphi}{t}.3.6.12$ und wenn DZ die Entfernung des Mittelpuncts des Stoßes von derselben ist, so muß ihre Summe $Ma.\frac{\varphi}{t}.DZ = 30.\frac{\varphi}{t}.DZ$ sein.

Hieraus folgt $DZ = \frac{128}{15} = 8\frac{8}{15}$.

Auch einem anderen Puncte wird von manchen Mechanikern die Benennung „Mittelpunet des Stoßes" beigelegt und zwar demjenigen, in welchem ein um eine Axe sich drehender Körper eine ruhende Masse, oder ein bewegter Körper auf den um eine Axe beweglichen treffen muß, um dem gestoßenen die größte Winkelgeschwindigkeit zu ertheilen. Der Abstand desselben von der Drehaxe ist der nämliche, wie für den in der vorigen Note als Mittelpunct der Trägheit bezeichneten.

seiner Länge anfassen und mit dem Ende des längeren Theils aufschlagen können, ohne einen Rückschlag zu empfinden.

77. Stoß zweier Körper, von welchen der eine mit einer festen Axe verbunden ist. — Auf einen an der Are **A** (Fig. 132) aufgehängten Körper stoße in der Richtung **TL**, welche normal zur Berührungsfläche ist und in eine zur Drehare normale Ebene fällt, ein anderer Körper **P** von der Masse **m** und dem Gewichte **p** mit einer Geschwindigkeit **V**. Die Veränderungen, welche die aneinanderstoßenden Körper erleiden, scheinen zwar in einem untheilbaren Augenbilicke vor sich zu gehen; sowie jedoch jede Wirkung eine gewisse Zeit erfordert, so auch die Mittheilung der Bewegung durch den Stoß. In dem Augenblicke, wo sie auf einander treffen, entsteht eine durch Gewichte meßbare Rückwirkung des einen auf den andern, vermöge welcher sie sich zusammendrücken. Da der Druck beider Körper auf einander mit Null anfängt, und in dem Maße, als sie sich zusammendrücken, wächst, so wird er alle Zwischengrade bis zu seinem größten Werthe durchlaufen. Sehen wir von dem Körper **Q** ab und bezeichnen wir den kleinen Geschwindigkeitsgrad, um welchen die Geschwindigkeit während des ersten Zeitelementes **t** vermindert wird, mit **v**, so können wir den Druck durch

$$F = \frac{mv}{t}$$

messen. Diese Kraft strebt den Körper **Q** um seine Axe zu drehen und ihm in derselben Zeit eine Winkelbeschleunigung φ zu ertheilen, so daß die Trägheitskräfte der einzelnen Massenelemente mit der Kraft **F** im Gleichgewichte sein müssen. Die Summe der Momente der erstern muß daher dem Momente der Kraft **F** oder dem Producte aus dieser Kraft in das Perpendikel **AC** aus der Are auf ihre Richtung gleich sein. Dies giebt nach §. 63

$$F \,.\, AC = \frac{T\varphi}{t},$$

wenn T das Trägheitsmoment des Körpers Q ist. Da aber nach dem Principe der Rückwirkung die auf die beiden Körper durch den Stoß ausgeübten Pressungen einander gleich sein müssen, so ist

$$\frac{T \cdot \varphi}{AC \cdot t} = \frac{mv}{t} \text{ oder } AC \cdot mv = T \cdot \varphi$$

Auf gleiche Weise werden wir, wenn v_1, v_2, die kleinen Geschwindigkeitsabnahmen des Körpers P, und φ_1, φ_2... die Zunahmen der Winkelgeschwindigkeit des Körpers Q in den folgenden Zeitelementen bezeichnen, die Gleichungen

$$AC \cdot mv_1 = T\varphi_1$$
$$AC \cdot mv_2 = T\varphi_2 \text{ u. s. w.,}$$

und wenn wir dieselben durch Addition verbinden,

$$AC \cdot m\,(v + v_1 + v_2 + \ldots) = T\,(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots)$$

erhalten. Nennen wir daher die während einer gewissen Zeit, wo beide Körper mit einander in Berührung sind, von P verlorne Geschwindigkeit u, und ω die durch den Körper Q gewonnene Winkelgeschwindigkeit, so ist

$$AC \cdot ma = T\omega.$$

Sind die Körper weich und unelastisch, so üben sie von dem Augenblicke an, wo sie gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben, keine Rückwirkung mehr gegen einander aus und gehen gemeinschaftlich mit gleicher Geschwindigkeit fort. Indem wir nun für unsern Zweck dergleichen Körper voraussetzen, finden wir die Geschwindigkeit des Körpers P in dem Augenblicke, wo Q die Winkelgeschwindigkeit ω erreicht hat, $AC \cdot \omega$ und den Geschwindigkeitsverlust u des erstern

$$u = V - AC \cdot \omega, \text{ so daß}$$

$$AC \cdot m\,(V - AC \cdot \omega) = T\omega \text{ und } \omega = \frac{AC \cdot m \cdot V}{mAC^2 + T}$$

die Winkelgeschwindigkeit ist, welche der gestoßene Körper nach dem Stoße besitzt.

Körper, welche nach dem Stoße gemeinschaftlich und mit gleicher Geschwindigkeit fortgehen, müssen jedoch deshalb nicht durchaus unelastische sein, sondern es kann auch diese

gemeinschaftliche Bewegung eine Folge davon sein, daß sich der anstoßende Körper auf irgend eine Weise mit dem gestoßenen verbindet. Im folgenden Paragraphen, wo von Kugeln die Rede ist, welche gegen einen Holzblock abgeschossen werden, in welchem sie stecken bleiben, werden wir daher von obiger Formel Gebrauch machen können.

78. Anwendung des Vorigen auf das ballistische Pendel. — Das vorzüglichste Mittel, welches die Artillerie zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit der Geschützkugeln anwendet, ist das sogenannte Ballistische oder Robin'sche Pendel. Dasselbe besteht der Hauptsache nach aus einem starken pendelartig an schneidigen Aren aufgehangenen und mit eisernen Bändern eingefaßten Holzblocke (Fig. 134), gegen welchen Geschützkugeln abgeschossen werden. Auf der vorderen, dem Laufe zugekehrten und gegen die Bewegungsebene normalen Fläche ist eine Bleiplatte aufgelegt, durch welche die Kugeln schlagen müssen, ehe sie in den Holzblock eindringen, und welche denselben eine unelastische Fläche darbietet.

Ist **V** die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel, **m** ihre Masse, ω die Winkelgeschwindigkeit des Blockpendels nach dem Stoße, **T** sein Trägheitsmoment, **M** seine Masse, **r** der Abstand des Mittelpunctes des Stoßes **O** von der Drehare, so erhalten wir, wenn das Geschütz so aufgestellt und gerichtet wird, daß die Kugel gegen den Punct **O** und normal auf die Are **AO** des Pendels auftrifft, dem vorigen Paragraphen zufolge aus $\omega = \frac{r \cdot m \cdot V}{mr^2 + T}$ die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel

$$V = \frac{mr^2 + T}{mr} \omega$$

Bezeichnen wir mit **H** die vertikale Höhe, um welche der Schwerpunct des Pendels vermöge der Winkelgeschwin-

digkeit ω gehoben wird, so ist die lebendige Kraft des Blockes $T \cdot \omega^2$, die der Kugel $mr^2\omega^2$, daher

$$(T + mr^2)\,\omega^2 = 2\,(M + m)\,gH = 2\,(P + p)\,H,$$

wenn P das Gewicht des erstern, p das der letztern ist.

Wäre demnach das Trägheitsmoment des Pendels bekannt, so könnte man durch diese Gleichung die Winkelgeschwindigkeit desselben nach dem Stoße, und mit Hülfe derselben die Geschwindigkeit der Kugel bestimmen. Man kann aber, wie wir §. 74 gesehen haben, das Trägheitsmoment eines Pendels durch Beobachtung seiner Schwingungszeit auch aus der Masse und der Entfernung a des Schwerpuncts von der Axe bestimmen. Machen wir hiervon Gebrauch und bezeichnen wir die Schwingungszeit des Blockpendels durch t, so ist, weil mit der Masse des Pendels auch die der Kugel um die Axe sich schwingt, die bewegte Masse $M + m$ und ihre Trägheit $T + mr^2$, folglich

$$mr^2 + T = a\,(M + m)\,g\left(\frac{t}{\pi}\right)^2.$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit demjenigen für die lebendige Kraft, so wird

$$a\left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \omega^2 = 2H \text{ oder } \omega = \frac{\pi}{t}\sqrt{\frac{2H}{a}}.$$

Die Geschwindigkeit der Kugel ist daher

$$V = \frac{\pi}{t}\sqrt{\frac{2H}{a}} \cdot \frac{T + mr^2}{mr},$$

und wenn man für

$$T + mr^2 = a\,(M + m)\,g\left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \text{ und für } t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

oder für $\frac{g}{r}\left(\frac{t}{\pi}\right)^2 = 1$ setzt:

$$V = \frac{\pi}{t}\sqrt{2Ha} \cdot \frac{(M + m)}{m} = \frac{\pi}{t}\sqrt{2aH} \cdot \frac{P + p}{p},$$

da sich das Verhältniß der Massen durch das der Gewichte ersetzen läßt. Die Größe $\sqrt{2aH}$ ist die mittlere Proportionale aus $2a$ und H. Die Höhe H aber ist bei geringem Ausschlage des Pendels so klein, daß $2a - H$ an die Stelle von $2a$ gesetzt werden darf, so daß $\sqrt{2a.H} = \sqrt{(2a-H)H} = \frac{s}{2}$ ist, wenn s die Sehne desjenigen Bogens bezeichnet, welchen bei einer Schwingung der Schwerpunct des Pendels beschreibt. Hat man daher die Schwingungen des Blockpendels in einer gewissen Zeit gezählt, oder was dasselbe ist, die Dauer t einer Schwingung beobachtet, und die Sehne des vom Schwerpuncte beschriebenen Bogen gemessen, so kann man durch die Formel

$$V = \frac{\pi}{t} \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{P+p}{p}$$

die Geschwindigkeit der Kugel in dem Augenblicke finden, wo sie auf das Pendel traf.

Durch eine eiserne Spitze, welche in dem durch den Schwerpunct gehenden Perpendikel zur Drehare unten am Blocke angebracht ist, kann in einer mit Talg ausgegossenen kreisförmigen Rinne der von derselben durchlaufene Bogen markirt und daraus der des Schwerpuncts und die zugehörige Sehne s gefunden werden.

Beträgt z. B. das Gewicht der Kugel 5 Kil., das des Pendels 4000 Kil., die Zahl der Schwingungen in 110 Secunden 60 und hätte man die Sehne $s = 0{,}6$ m gemessen, so würde $t = \frac{11}{6}$ und die Geschwindigkeit der Kugel

$$V = \frac{3{,}1416 \cdot 6}{11} \cdot \frac{0{,}6}{2} \cdot \frac{4000+5}{5} = 411{,}8 \text{ m sein.}$$

IX.

Einfache Maschinen. — Gespannte Seile, Seilmaschinen. Kettenlinie.

78. Einfache Maschinen. — Systeme von festen Körpern, bestimmt, die Wirkung der Kräfte fortzupflanzen und zu verändern, um andere Kräfte im Gleichgewichte zu erhalten oder zu überwinden und beabsichtigte Bewegungen hervorzubringen, nennt man Maschinen. Insofern gewisse einfache Vorrichtungen der Art zur Zusammensetzung aller Uebrigen beitragen und gleichsam die Organe derselben bilden, unterscheidet man einfache und zusammengesetzte Maschinen. Die Betrachtung der einfachen Maschinen oder sogenannten mechanischen Potenzen, der Seilmaschine, der schiefen Ebene, des Keils, der Rolle, des Wellrades und des Hebels, ist es, womit wir uns in den folgenden Abschnitten der zweiten Abtheilung beschäftigen werden.

79. Gleichgewicht eines an beiden Enden gezogenen Seils und Spannung desselben. — Eine Verbindung von Seilen, an welchen Kräfte wirken, wird eine Seilmaschine genannt. Wir nehmen die Seile wegen ihres hohen Grades von Biegsamkeit und zur Vereinfachung unserer Betrachtungen als vollkommen biegsam an. Ebenso setzen wir sie unausdehnbar voraus, weil die Bedingungen des Gleichgewichts für Seile, welche sich unter der Wirkung von Kräften ausgedehnt haben, die nämlichen sind, wie für völlig unausdehnbare. Endlich sehen wir auch, weil sie in der Regel von sehr geringem Belang ist, von der Trägheit, und wo das Gegentheil nicht beson-

ders erwähnt wird, auch vom Gewichte der Seile ab. Sollte es für nöthig befunden werden, die Trägheit in Rechnung zu ziehen, so geben die früheren Sätze das hierzu Erforderliche an die Hand; wie man aber das Gewicht der Seile selbst mit in die Richtung einführen kann, wird im Verfolge dieses Abschnittes gezeigt werden.

Um die Bedingungen des Gleichgewichts für ein Seil **AB** (Fig. 135) zu finden, an dessen Enden beliebige Kräfte **P, Q, R** .. und P_1, Q_1, R_1 .. wirken, wollen wir uns durch jedes Seilende eine zur Richtung des Seils normale Ebene gelegt denken, und jede der gegebenen Kräfte nach einer dieser Ebene und nach der Seilesrichtung in zwei Seitenkräfte zerlegen. Soll nun das Seil nicht zur Seite abweichen, so müssen offenbar die in jede der beiden Ebenen **MN** und M_1N_1 fallenden Componenten Gleichgewicht bilden. Die übrigen Componenten fallen dann sämmtlich in die Richtung des Seils und werden ebenfalls Gleichgewicht geben, wenn die Summe oder Differenz derjenigen, welche am Ende **A** wirken, der Summe oder Differenz der in **B** wirkenden gleich und entgegengesetzt ist. Lassen sich daher die an beiden Seilenden angreifenden Kräfte überhaupt auf zwei gleiche und entgegengesetzte Mittelkräfte zurückführen, so ist Gleichgewicht an dem Seile vorhanden. Wegen der Biegsamkeit des Seiles ist es aber zugleich auch nöthig, daß jede dieser beiden Kräfte nach der dem Seile abgekehrten Seite wirke.

Der gewaltsame Zustand, in welchem sich jeder Punct des Seiles durch die nämlichen beiden, sich gegenseitig aufhebenden, Kräfte befindet, die gemeinschaftliche Intensität derselben, wird die Spannung des Seiles genannt. Sie ist den erwähnten Mittelkräften gleich und läßt sich wie diese durch Gewichte oder mit Hülfe von Dynamometern messen.

80. Arbeitsgröße der Kräfte an einem Seile. — Bedingt das Gleichgewicht der an einem Seile wirkenden Kräfte, wie wir oben sahen, die Gleichheit der beiden in die Seilesrichtung fallenden Resultanten, so muß auch

die Arbeitsgröße der an dem einen Ende angreifenden Kräfte der Arbeitsgröße derjenigen gleich sein, welche am entgegengesetzten Ende wirken. Die Arbeit dieser Resultanten ist auch der der Seilesspannung in irgend einem Puncte gleich; es kann daher die Arbeitsgröße aller an einem Seile wirkenden Kräfte durch das Product aus dieser Spannung in den kleinen Weg gemessen werden, welchen der Punct in der Richtung des Seiles durchläuft. Die Vorrichtung zum Läuten der Glocken besteht gewöhnlich in einem mit der Glocke durch einen Bügel verbundenen Taue AB (Fig. 136), von welchem eine Anzahl schwächerer Seile ausgehen, die von einer gleichen Anzahl Arbeiter ergriffen und gezogen werden. Die Arbeit jedes einzelnen Strangziehers zu berechnen, würde sehr schwierig sein, weil sich die Richtung seiner Kraft beständig ändert. Aus der auf das Tau AB ausgeübten Spannung aber und dem Wege derselben läßt sich die Summe der Arbeitsgrößen sämmtlicher Arbeiter leicht finden. Natürlich werden es nur die auf die Richtung AB bezogenen Seitenkräfte der Arbeiter sein, welche die Spannung des Taues bewirken und Arbeit im Sinne des beabsichtigten Zweckes verrichten, während die rechtwinkelig gegen diese Richtungen fallenden Componenten sich gegenseitig aufheben und nutzlose Ermüdung der Arbeiter bewirken. Die Neigung der Seilenden gegen das Tau AB ist daher die Ursache eines um so größern Kraftaufwandes der Arbeiter, je beträchtlicher sie selbst ist. Ein Uebelstand, dem man leicht abhelfen kann, wenn man die Seilenden an einem großen horizontalen Ringe befestigt, dessen Mittelpunct in der Verlängerung des Taues liegt, und an dessen Umfange vertikale Zugseile oder Riemen für den Angriff der Arbeiter vertheilt sind.

81. Gleichgewicht zwischen Seilen, welche in einem Puncte zusammenlaufen. — Werden verschiedene in einem Puncte zusammenlaufende Seile durch Kräfte gespannt, so wirken diese vermittelst der Seile ebenso auf diesen Punct, als ob sie unmittelbar an demselben an-

gebracht wären. Die Spannung jedes Seiles ist der an demselben wirkenden Kraft gleich und entgegengesetzt und, wenn Gleichgewicht stattfindet, so groß, wie die Resultante der Spannungen aller übrigen. Die Bedingung für das Gleichgewicht der an dem Seile wirkenden Kräfte fordert daher, daß jede einzelne derselben der Mittelkraft aller andern gleich sei nach entgegengesetzter Richtung.

Wenn an einem in den Puncten A und B (Fig. 137) befestigten Seile, etwa in der Weise, wie Straßenlaternen (Fig. 138) zuweilen aufgehängt werden, ein Gewicht P so angebracht ist, daß es mittelst einer beweglichen Rolle oder eines Ringes an dem Seile fortgleiten kann, so muß für den Gleichgewichtszustand das Gewicht P der Resultante der Spannungen t und t_1 in den Seilenden AC und BC gleich sein. Wird daher auf die durch den Ring gehende Vertikale eine dem Gewichte P proportionale Linie CD aufgetragen und in Bezng auf die Richtungen AC und BC in Seitenkräfte zerlegt, so stellen die Seiten Ct und Ct_1 des Parallelogramms $CtDt_1$ die Spannungen der Seilenden AC und BC dar. Wäre nun eine dieser Spannungen größer, als die andere, so würde der Ring nicht in Ruhe bleiben, sondern in dem Umfange einer aus den Puncten A und B als Brennpuncten mit der Schnur ACB beschriebenen Ellipse so lange fortgleiten, bis die Spannungen einander gleich geworden sind. Denn der Ring wird erst zur Ruhe kommen, wenn er die Lage des stabilen Gleichgewichts in dieser Ellipse eingenommen hat, d. h., wenn er im tiefsten Puncte C der Curve, für welchen die Tangente horizonta ist, angekommen ist. Und da die Leitstrahlen der Ellipse frür einen bestimmten Punct mit der Tangente desselben stets gleiche Winkel einschließen, mithin die Diagonale CD den Winkel ACB halbirt, so ist $CtDt_1$ ein gleichseitiges Parallelogramm und $t = t_1$. Es ist daher nur nöthig, mit der Länge des Seiles AC + BC eine durch B gelegte Vertikale in E zu schneiden, BE in F zu halbiren und FC normal auf BE zu errichten, um im

Durchschnittspuncte C der letztern mit der Linie AE den Ort des beweglichen Ringes zu erhalten, weil alsdann die Winkel DCt und DCt_1, mithin auch die Spannungen t und t_1 einander gleich sind. Für den Fall, daß das Gewicht P (Fig. 139) durch einen festen Knoten im Puncte C des Seiles ACB befestigt ist, ergiebt sich ohne Weiteres der Ort des Knotens in der Spitze des Dreiecks ABC, die Spannungen sind aber dann, wie man sich leicht durch Zerlegung der dem Gewichte proportionalen Linie CD in die Componenten Ct und Ct_1 überzeugt, nicht mehr einander gleich, sondern es ist immer an der Seite, wo der kleinste Abstand zwischen einem der Befestigungspuncte und der Senkrechten durch den Punct C ist, die Spannung größer, als an der andern. Und nähme die Last eine Lage in der durch den Befestigungspunct A gehenden Vertikalen ein, so würde natürlich die Spannung auf dieser Seite dem Gewichte P selbst gleich, die des andern Seilendes aber Null sein. Endlich ist es klar, daß unmöglich der Knoten jemals auf eine und dieselbe Seite von beiden durch die Aufhängepuncte gehenden Vertikalen treten kann. Denn hätte eines der Seilstücke die erforderliche Länge hierzu und man brächte z. B. den Knoten in die Lage C_1 (Fig. 140), so würde er, dem Gewichte P wieder allein überlassen, durch nichts zurückgehalten werden, die Lage C_2 senkrecht unter A einzunehmen, während das andere Seitenstück schlaff werden müßte.

82. Gleichgewicht des Seilpolygons. — An verschiedenen Puncten A, B, C, D... eines Seiles (Fig. 141) mögen die Seile AP, BQ, CR... angeknüpft sein und nicht allein an diesen die gegebenen Kräfte P, Q, R... wirken, sondern auch an den beiden Seilenden A_1 und D_1 und in deren respectiven Richtungen die Kräfte N und N_1. Im Zustande des Gleichgewichts bildet dieses Seil ein Vieleck, welches man ein Seilpolygon nennt und dessen Gestalt eine solche ist, daß die Spannungen und Kräfte in jeder einzelnen Spitze einander das Gleichgewicht halten. Wenn

man daher eine der Kräfte, z. B. **R** in Bezug auf die die Spitze bildenden Seiten in zwei Componenten zerlegt, so sind diese letztern genau den in diesen Seiten stattfindenden Spannungen entgegengesetzt gerichtet und gleich. Die Spannung t_2 ist aber auch die nämliche, welche im Puncte **D** nach der Richtung **DC** stattfindet und mit den Kräften **S** und N_1 Gleichgewicht bildet; die Spannung t_3 ist ebenso mit der Kraft **Q** und der Spannung des Seilstückes **BA** im Gleichgewichte und letztere wiederum mit den Kräften **P** und **N**, so daß durch t_2 die Kräfte N_1 und S_1 durch t_3 die Kräfte **P**, **Q** und **N** auf den Punct **C** übergetragen werden und sämmtlich als in demselben angreifend gedacht werden können. Die Resultante der Spannungen t_2 und t_3 war aber der Kraft **R** entgegengesetzt und gleich, folglich ist jede einzelne der gegebenen Kräfte der Mittelkraft der übrigen gleich und entgegengesetzt und die Resultante aller: Null. Demnach müssen die an dem Seilpolygon wirkenden Kräfte für den Gleichgewichtszustand so beschaffen sein, daß sie, sämmtlich mit sich selbst parallel nach einem Puncte verlegt, Gleichgewicht bilden würden.

Ist einmal diese Bedingung erfüllt, so läßt sich das Polygon immer so anordnen, daß Gleichgewicht erreicht wird, indem man die Seile **AA**, **AP** in die Richtungen der Kräfte **N** und **P** bringt, zu diesen die Mittelkraft aufsucht, das Seilstück **AB** in die derselben entgegengesetzte Richtung bringt, die Kräfte **N**, **P**, **Q** parallel mit sich selbst nach **B** transportirt, ihre Resultante sucht, um die Richtung des Seilstücks **BC** zu erhalten u. s. f.

83. Gleichgewicht des Seilpolygons, an welchem parallele Kräfte oder Gewichte wirken. Seilwage. — Sind die Richtungen der Kräfte **P**, **Q**, **R**, **S**.. (Fig. 142) parallel, so kann nur Gleichgewicht bestehen, wenn sowohl die Richtungen der Kräfte, als auch die Seiten des Polygons in einer und der nämlichen Ebene liegen. Die Kraft **P** muß nämlich in die Ebene der Seilstücke AA_1 und AB_1 die Kraft **Q** in die Ebene der Seilstücke **AB**

und BC fallen u. s. f., mithin befinden sich die Polygonseiten A_1A, AB, BC... in derselben Ebene, wie die Kraftrichtungen AA_1, AP, BQ... Stellt man sich das Polygon als eine Verbindung schwerer Stangen vor, welche jede dem Gleichgewichte entsprechende Form vollkommen ungehindert annehmen kann, so können die Gewichte p, p_1, p_2... der einzelnen Stangen AB, BC, CD... mit senkrecht wirkenden und an den Spitzen des Polygons angebrachten Kräften verglichen werden. Jedes dieser Gewichte kann bekanntlich in zwei parallele und gleichgroße Componenten zerlegt werden, welche in den Enden der Stange angreifen und deren Summe dem Gewichte derselben gleich ist. Demnach sind die Verbindungspuncte B, C.. den vertikalen Kräften $\frac{1}{2}(p + p_1)$, $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$... unterworfen, wodurch das Polygon als ein gewichtloses erscheint, welches in den betreffenden Stellen durch senkrechte Kräfte gezogen wird. Nun ist uns von den vertikalen Kräften P, Q, R, S... bekannt, daß sie mit den an den Seilenden wirkenden N und N_1 im Gleichgewichte stehen und eine der Mittelkraft der letztern gleiche und entgegengesetzte Resultante geben müssen, welche, da die Kräfte nichts als senkrecht niederziehende Gewichte sind, in die durch den Schwerpunct der letztern gehende Vertikale fällt. Die verlängerten Polygonseiten AA_1 und DD_1 oder die Richtungen der äußersten Spannungen werden sich daher in einem und demselben Puncte O dieser senkrechten Linie schneiden, und wenn die Linie OM die Summe, d. h. die Mittelkraft der sämmtlichen Gewichte vorstellt, entsprechen die daraus abgeleiteten und auf die Richtungen OA und OA_1 bezogenen Componenten derselben den Spannungen N und N_1 in den Puncten A_1 und D_1.

Bei dem Seile (Fig. 143), welches an seinen Endpuncten befestigt und an zwei Stellen C und D mit Gewichten P und Q belastet ist, geht für den Gleichgewichtszustand die Richtung der Mittelkraft $R = P + Q$ durch den Durchschnittspunct der verlängerten Seilstücke AC und BD. Nun wissen wir aber aus §. 18 der II. Abtheilung, daß

von drei Kräften P, Q und R, deren Richtungen durch eine Linie geschnitten werden, jede dem Theile dieser Linie proportional ist, welcher durch die beiden andern Kraftrichtungen begränzt wird. Es ist demnach $\frac{P}{R} = \frac{CG}{CD}$, $\frac{Q}{R} = \frac{GD}{CD}$, und da die Dreiecke CG und CDF, sowie DGO und DCE ähnliche sind,

$$\frac{P}{R} = \frac{CG}{CD} = \frac{GO}{DF} \text{ und } \frac{Q}{R} = \frac{GD}{CD} = \frac{GO}{CE}.$$

Die Verbindung beider Proportionen giebt

$$\frac{Q}{P} = \frac{DF}{CE}.$$

Hätte man nun irgend eine Vorrichtung angebra t, durch welche für jede Gleichgewichtslage des Polygons das Verhältniß DF : CE gemessen werden könnte, so würde man mit Hülfe eines bekannten Gewichtes P die unbekannte Last $Q = \frac{DF}{CE} . P$ bestimmen können. Man nennt daher eine so eingerichtete Seilmaschine eine Seilwage.

84. Spannung in den Seiten des Seilpolygons. — Um unter den Kräften N und N_1 und den Gewichten P, Q, R... am Polygon ABCD... (Fig. 144) Gleichgewicht zu haben, ist dasselbe für jeden Knoten insbesondre erforderlich, so daß, wenn in dem Dreiecke Apn die Seite An die Intensität der Kraft N in der Verlängerung von AA_1 vorstellt, Ap der Kraft P und pn der Spannung t_1 entsprechen muß. Trägt man nun auf die Vertikale $a_1 e$ vom Puncte a_1 aus den Kräften P, Q, R... proportionale Theile $a_1 a$, ab, bc... auf, macht nach demselben Verhältnisse $a_1 S$ der Kraft N gleich und parallel der Polygonseite AA_1 und zieht aS, so ist das Dreieck $a_1 aS$ ähnlich dem Dreiecke Apn, und die Seite aS, der Seite pn des andern entsprechend, repräsentirt nach Größe und Richtung die Spannung t_1. Durch Bildung eines neuen Dreiecks abS

läßt sich auf die nämliche Weise die Bedingung für das Gleichgewicht des folgenden Knotens B construiren, so daß bS der Intensität und Richtung der Spannung t_2 correspondirt.

Man sieht aus dieser Darstellung, daß, wenn man die Theile einer vertikalen Linie der Reihe nach den am Seilpolygon im Gleichgewichte befindlichen Gewichten proportional macht, durch die Theilpuncte gerade und den Polygonseiten parallele Linien zieht, sich letztere in einem und demselben Puncte S schneiden und ihren Größen nach wie die Spannungen der entsprechenden Polygonseiten verhalten.

85. Die Kettenlinie und ihre Anwendung. — Das Seilpolygon geht in eine stetige Curve über, wenn die Seiten desselben unendlich klein und nur der Wirkung ihrer eigenen Gewichte unterworfen gedacht werden. Man nennt diese Curve, weil sie die Gestalt einer an ihren Enden A und B (Fig. 145) befestigten und frei hängenden biegsamen Kette darstellt, die Kettenlinie.

Wenn man sich an einem im Gleichgewichte befindlichen Seilpolygone die einzelnen Seiten als unbiegsame und um die Knoten vollkommen bewegliche Körper denkt, so würde das Gleichgewicht auch nicht gestört werden, wenn die Gewichte der Seiten, anstatt senkrecht nieder zu ziehen, die entgegengesetzte Richtung annähmen. Dann würde aber dieses Polygon in dem nämlichen Falle sein, wie eine Reihe nach der verwendeten Kettenlinie (Fig. 146) aneinander gelegter Kugeln, und man sieht daraus, daß die so angeordnete Kugelreihe im Gleichgewichte sein muß. Die Wölbsteine eines Gewölbes werden daher auch ohne zwischengebrachten Mörtel im Gleichgewichte sein, wenn die Wölblinie die den Gewichten der Steine entsprechende Kettenlinie ist, und keine Kräfte weiter auf dieselben wirken. Dieser Eigenschaft wegen wird die Kettenlinie mit Erfolg in der Baukunst zur Construction freier Gewölbe angewendet. An den Ketten der Hängebrücken tritt ebenfalls die Kettenlinie wieder auf und da es bei der Anordnung solcher Brücken besonders auf

die Kenntniß der Spannungen an den Enden der Ketten ankommt, so werden wir in dem Folgenden die Curve näher untersuchen.

86. Eigenschaften der Kettenlinie und Construction derselben. — Die Kettenlinie, welche eine an den Puncten **A** und **B** (Fig. 147) befestigte frei hängende Kette bildet, ist als ein im Gleichgewichte befindliches schweres Polygon von unendlich kleinen Seiten zu betrachten. Nehmen wir gleiche Theile der Kette gleich schwer an, in welchem Falle die Curve die gemeine Kettenlinie heißt, und theilen wir eine ihrem Gewichte proportionale Vertikale A_1B_1 in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, so giebt es einen Punct **S**, welcher eine solche Lage hat, daß die aus den Theilpuncten der Linie A_1B_1 dahin gezogenen Geraden der Reihe nach den auf einanderfolgenden Curvenelementen parallel sind und daß die Größe einer jeden der Spannung desjenigen Elementes proportional ist, mit welchem sie gleiche Richtung hat. Von allen diesen Spannungen ist offenbar diejenige am kleinsten, welche durch das Perpendikel C_1S zur Senkrechten A_1B_1 repräsentirt wird, und das Curvenelement, zu welchem diese Spannung gehört, wird horizontal, d. h. es wird der Scheitel selbst sein müssen. Je weiter sich die nach **S** laufenden Linien von dem Perpendikel C_1S entfernen, desto größer sind sie. Die Spannungen der Curvenelemente werden daher auf beiden Seiten des Scheitels mit ihrer Entfernung von demselben immer größer und größer, und sind am größten in den Befestigungspuncten **A** und **B**. Da ferner von den nach **S** laufenden Linien immer je zwei, welche die Linie A_1B_1 in gleichen Abständen von C_1 schneiden, gleich sind und gleiche Winkel mit der die Spannung im Scheitel vorstellenden Linie C_1S einschließen, wie z. B. F_1S und G_1S, so müssen auch je zweien, gleichweit vom Scheitel entfernten, Curvenelementen gleiche Spannungen und gleiche Neigungen gegen die durch den tiefsten Punct **C** gehende Vertikale zukommen. Alle Sehnen, welche zwei gleichweit vom Scheitel abstehende Elemente **M**

und N verbinden, werden daher durch die Linie LC halbirt, so daß die Kettenlinie eine in Bezug auf diese Vertikale symmetrische Curve ist. Ferner erhellet aus dem Vorigen, daß die Spannungen der äußersten Kettenelemente gleich sein werden, wenn die Befestigungspuncte in gleichem Niveau liegen, und daß der Punct S, in welchem alle die den Spannungen proportionalen Linien zusammenlaufen, in diesem Falle in dem auf der Mitte der Linie A_1B_1 errichteten Perpendikel liegen muß.

Die Zunahme der Spannungen vom tiefsten Puncte nach den Befestigungspuncten hin, gilt auch noch für ein vertikal aufgehangenes Seil oder eine dergleichen Kette; die Spannung im untersten Gliede oder im tiefsten Puncte ist am geringsten und nur der daran hängenden Last gleich, während jede andere Stelle überdies noch durch das Gewicht des darunter befindlichen Ketten- oder Seilstücks gespannt wird. Die Kette oder das Seil müßte daher, um dem Zerreißen überall gleichen Widerstand zu leisten, oben stärker sein, als unten.

Wenn von einer gemeinen Kettenlinie das Gewicht, die Länge und der Punct gegeben ist, wo sich die den Spannungen entsprechenden Linien schneiden, so ist es nun nach dem Vorigen leicht, die Curve zu construiren. Man darf nur die dem Kettengewichte proportionale Vertikale A_1B_1 (Fig. 148) und die ganze Kettenlänge in eine gleiche Anzahl gleicher Theile theilen, die Theilpuncte mit dem gegebenen Puncte S verbinden, an einen beliebigen Punct A eine zu A_1S parallele Linie legen, $A\alpha_1$ einem Kettentheile gleich machen, durch den Punct α eine zweite zu αS parallele und dem vorigen Theile $A\alpha_1$ gleiche Linie ziehen und so fortfahren, so erhält man ein Polygon $A\alpha_1\beta_1\ldots\ldots$, welches der stetigen Kettenlinie um so näher kommt, je größer man die Zahl der gleichen Theile auf der gegebenen Kettenlänge angenommen hat.

Ist der Punct S nicht unmittelbar, sondern nur durch das Verhältniß der Spannungen in den Kettenenden zum

Kettengewichte gegeben, so kann man aus den diesen Größen proportionirten Linien ein Dreieck construiren, dessen dem Kettengewichte gegenüber befindliche Spitze der Durchschnittspunct aller Spannungen ist.

Die Tangente zu irgend einem Puncte einer Curve ist bekanntlich nichts anderes, als die Richtungslinie des diesen Punct bildenden Curvenelementes. Man wird daher zu einem beliebigen Puncte **E** der Kettenlinie **AEB** (Fig. 149) eine Tangente ziehen können, wenn man in dem aus den Spannungen und dem Kettengewichte erhaltenen Dreiecke von $\mathbf{A}_1$ aus das Stück $\mathbf{A}_1\mathbf{E}_1$, proportional dem Gewichte der Kette von **A** bis $\mathbf{E}_1$ aufträgt, die Linie $\mathbf{E}_1\mathbf{S}$ zieht und durch **E** eine Parallele mit derselben legt.

87. Aehnliche Kettenlinien. — Zwei Kettenlinien **ABC** und **abc** (Fig. 147) sind einander ähnlich, wenn sich ihre Aufhängepuncte in parallelen Linien befinden und wenn ihre Längen **ACB** und **acb** in dem nämlichen Verhältnisse stehen, wie die Entfernungen **AB** und **ab** zwischen ihren Aufhängepuncten. Denn da (82 d. II. Abth.) das Gleichgewicht der Kettenlinie **ABC** auch fortbesteht, wenn die Längen ihrer Elemente nach einem constanten Verhältnisse **ab : Ab** verkürzt werden, so wird nicht allein in der der Linie **ACB** ähnlichen Kettenlinie **acb** Gleichgewicht, sondern es werden auch die Elemente der letztern mit denen der ersteren der Reihe nach parallel sein und in demselben Verhältnisse **ab : AB** stehen.

Die Richtungen der Linien $\mathbf{A}_1\mathbf{S}$, $\mathbf{B}_1\mathbf{S}$, $\mathbf{C}_1\mathbf{S}$ ... entsprechen demnach auch den Richtungen der Elemente der kleinen Kettenlinie **acb** und eine mit $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ parallele Linie kann so gelegt werden, daß sie eben so die Gewichte der kleinen Kette repräsentirt, wie $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ die der größeren. Ist $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$ diese Linie, so heißen die Spannungen $\mathbf{a}_1\mathbf{S}$ und $\mathbf{A}_1\mathbf{S}$, welche parallelen Elementen beider Curven angehören, homologe Spannungen, und da nach der Figur

$$\mathbf{a}_1\mathbf{S} : \mathbf{A}_1\mathbf{S} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 : \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$$

ist, so folgt, daß bei zwei ähnlichen Kettenlinien die homologen Spannungen in demselben Verhältnisse stehen, wie die Gewichte der beiden Ketten.

88. **Bestimmung des Punctes, in welchem die den Spannungen entsprechenden Linien zusammenlaufen.** — Die Lage dieses Punctes gegen die dem Kettengewichte proportionale Linie hängt, wie wir gesehen haben, von den Spannungen in den Befestigungspuncten ab; es wird daher vor Allem nöthig sein, zur Kenntniß dieser Spannungen zu gelangen, wenn dieselben nicht unmittelbar gegeben sind. Gesetzt, es wäre eine Kettenlinie durch ihre Zeichnung gegeben, so müssen den Bedingungen des Gleichgewichts zufolge die Tangenten **AO** und **BO** (Fig 150) oder die Richtungen der äußersten Elemente der Curve sich in einem Puncte **O** schneiden, welcher in der durch den Schwerpunct der Kettenlinie gehenden Senkrechten liegt. Dann wird (§. 83 d. II. Abth.) das auf die Vertikale **LO** aufgetragene und in Bezug auf die beiden Tangenten zerlegte Kettengewicht in den Seiten OA_1 und OB_1 des Parallelogramms OA_1GB_1 die den äußersten Puncten **A** und **B** zukommenden Spannungen geben. Sind nur die Endpuncte **A** und **B** (Fig. 152) der Kettenlinie bekannt, so giebt es ein praktisches Verfahren, die Spannungen in den Puncten **A** und **B** zu finden. Man hänge nämlich eine kurze Kette an einer vertikalen Tafel so auf, daß die Linien **ab** und **AB** parallel sind und in demselben Verhältnisse stehen, wie die Länge der kleinen zur Länge der größern Kette. Wegen der Aehnlichkeit der Kettenlinien **ACB** und **acb** werden alsdann die Spannungen in den Puncten **a** und **b**, welche mit Hülfe von Dynamometern oder durch Abwiegen mit Gewichten gefunden werden können, sich ebenso zu dem Gewichte der kleineren Kette verhalten, wie die homologen Spannungen der größeren Kette zu ihrem Gewichte. Will man die unmittelbare Messung der Spannungen durch Dynamometer oder Gewichte umgehen, so kann man zunächst

durch die Horizontale ad die Kettenlinie in zwei Theile zerlegen, und, da der Kettentheil acd ebensowohl im Gleichgewichte sein muß, wie acb, die Aufgabe auf den einfacheren Fall reduciren, wo beide Aufhängepuncte in gleichem Niveau liegen. Trägt man unter dieser Voraussetzung auf die Vertikale $a_1 d_1$ (Fig. 152) eine dem Gewichte des Kettentheils acd proportionale Linie, so muß nothwendig nach dem Früheren der Punct, in welchem alle Spannungen der einzelnen Kettenelemente sich schneiden, in dem in der Mitte von $a_1 d_1$ errichteten Perpendikel LM liegen. Man nehme nun dafür einen willkührlichen Punct S_1 dieser Linie, construire diejenige Kettenlinie $a_2 c_2 e$ (Fig. 153), deren Elemente den in diesem Puncte zusammenlaufenden Spannungen parallel sind und suche den Durchschnittspunct p_1 der Tangenten für die äußersten Puncte dieser Curve. Wählt man nach einander noch mehrere Puncte S_2, S_3 ... (Fig. 152) in der Linie LM, construirt für sie als Durchschnittspuncte der Spannungen die Kettenlinien $a_2 c_3 f$, $a_2 c_4 g$ ... Fig. 153) und zwar alle mit der erstern von gleicher Länge und von gleichem Anfangspuncte a_2 aus, so erhält man, wenn man auch für diese Curven die Tangenten der Endpuncte zieht, die Durchschnittspuncte p_2, p_3 .... Man sieht nun leicht ein, daß und weshalb diese Puncte von der Linken gegen die Rechte fortrücken, je flacher die Kettenlinie construirt wird, und daß, wenn man den Punct S_1 nach und nach bis S_3 fortrücken ließe, der Punct p_1 ebenso allmählig nach p_3 kommen und irgend eine Curve $p_1 p_2 p_3$... beschreiben müßte. Wo nun auch der der wirklichen Spannweite $ad = a_2 d_2$ (Fig. 151 und 153) zukommende Durchschnittspunct in der Linie LM (Fig. 152) liegen mag, so ist soviel gewiß, daß der ihm entsprechende Durchschnitt der Tangenten für die Endpuncte der Kettenlinie acd in der durch die Puncte p_1, p_2, p_3 ... bestimmten stetigen Linie liegen muß. Andrerseits wissen wir aber auch, daß sich dieser Punct in der durch den Scheitel der Kettenlinie acd, d. i. durch die Mitte k der Spannweite $ad = a_2 d_2$ gehenden

Lothlinie befindet; es ist daher der der letztern und jener Curve $P_1 P_2 P_3 \ldots$ gemeinschaftliche Punct **P** auch der Durchschnittspunct der Spannungen in a und d, so daß a_2**P** und d_2**P** diese Richtungen selbst sind. Trägt man daher die dem Gewichte des Kettentheils acd proportionale Größe **PQ** auf die Vertikale durch k und zerlegt sie in Bezug auf diese Richtungslinien, so erhält man in **OP** = **PR** die Spannungen in den Puncten a_2 und d_2 oder a und d. Die Spitze **S** des mit diesen Spannungen über $a_1 d_1$ beschriebenen Dreiecks ist also der gesuchte Vereinigungspunct aller Spannungen der Kette acb, und b_1**S** die Spannung im Kettenende b, wenn $b_1 d_1$ proportional dem Gewichte des Kettentheils bd gemacht worden ist. Die so gefundenen Spannungen mit dem Verhältnisse der Gewichte der Ketten **ACB** und acb multiplicirt, geben endlich die Spannungen in den Puncten **A** und **B**.

89. Spannung an einem beliebigen Puncte der Kettenlinie. — Das Gleichgewicht einer Kettenlinie wird nicht aufgehoben, wenn man an irgend einem Puncte den Zusammenhang des Seils unterbricht und durch zwei der Spannung dieses Punctes gleiche Kräfte in der Richtung der Tangente desselben ersetzt. Ist daher **D** irgend ein beliebiger Punct der Kettenlinie **ACB** (Fig. 154) und **C** der Scheitel derselben, so wird der Theil **DC** für sich im Gleichgewichte sein, wenn man sich denselben von der übrigen Curve getrennt und in den Puncten **C** und **D** befestigt denkt. Damit nun das Gewicht des Kettentheils **CD** mit den Spannungen in **C** und **D** im Gleichgewichte sei, muß der Durchschnittspunct der Tangenten **DO** und **CO** in einer durch den Schwerpunct dieses Curventheils gehenden Senkrechten **MP** liegen und das Gewicht **P** des letztern der Resultante der Spannungen **T** und **T**, in den Puncten **D** und **C** gleich und entgegengesetzt gerichtet sein. Stellt also **OM** das Gewicht **P** dar und beschreibt man über den Tangenten ein Parallelogramm, für welches **OM** die Diagonale ist, so ist **OD** der Spannung **T** im Puncte **D**, **ON** der

Spannung T_1 im tiefsten Puncte C proportional. Wegen des Gleichgewichts der drei Kräfte P, T und T_1 kann jede derselben als die entgegengesetzte Resultante der beiden andern betrachtet werden, so daß die Spannung an irgend einem Puncte der Kettenlinie in zwei Componenten zerfällt werden kann, von welchen die eine der Spannung im Scheitel, die andere dem Gewichte des zwischen demselben und dem angenommenen Puncte befindlichen Kettentheils gleich ist.

Daraus folgt, daß die Vertikalspannung in jedem Puncte der Kettenlinie ebenso groß ist, wie das Gewicht der Kette von diesem Puncte bis zum Scheitel, und die Horizontalspannung an allen Puncten dieselbe und stets der im Scheitel gleich ist.

Ein Pfeiler (Fig. 156) also, welcher zur Befestigung eines Kettenendes dient, ist dadurch zwei rechtwinkelig gegen einander gerichteten Kräften unterworfen, von welchen die eine Vertikale, dem Gewichte der Kette bis zum Scheitel gleich, den Pfeiler gegen seine Basis andrückt, während die andere Horizontale und der Horizontalspannung im Scheitel oder an jedem anderen Puncte gleiche, den Pfeiler umzuwerfen strebt.

90. Spannungen der Endpuncte einer Kettenlinie, wenn die Senkung des Scheitels sehr gering ist. — Bei einer nur unbedeutenden Einsenkung des Scheitels unter die die Befestigungspuncte verbindende gerade Linie lassen sich die Spannungen der Kettenenden annähernd leicht durch Rechnung finden.

Bezeichne **ACB** (Fig. 155) eine solche Kettenlinie, bei welcher der Pfeil $CD = MO = h$ im Verhältniß zur Spannweite $AB = 2l$ sehr klein ist. Für das Gleichgewicht des Kettentheils **BC** verhalten sich, wenn **OB** und **OC** Tangenten zur Curve in **B** und **C** sind und **MO** senkrecht durch den Schwerpunct **G** desselben geht, die Seiten **MO : ON : MN** des Dreiecks **MON** wie das Gewicht **P** des Kettentheils **BC** zur Spannung T_0 des Scheitels **C**

zur Spannung **T** im Aufhängepuncte **B**. Nun geht aber **MO** durch den Schwerpunct der Curve **BGC**, welche wegen der geringen Pfeilhöhe sehr wenig gekrümmt ist. Es wird daher gestattet sein, den Schwerpunct dieses Curvenzweiges in seiner Mitte, d. h. so anzunehmen, als ob die Linie **BC** eine gerade wäre. Dieser Annahme zufolge ist

$$ON = BM = \frac{BD}{2} = \frac{l}{2}$$

$$MN = \sqrt{\overline{MO}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

und die obige Proportion

$$h : \frac{l}{2} : \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = P : T_0 : T,$$

woraus sich

$$T_0 = \frac{P \cdot \frac{l}{2}}{h} = \frac{Pl}{2h} \text{ und } T = \frac{P\sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}{h}$$

$$= P\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2h}\right)^2}$$

ergiebt, oder wenn man das Gewicht jeder Längeneinheit der Kette mit **p** bezeichnet und für $P = pl$ setzt,

$$T_0 = \frac{pl^2}{2h} \text{ und } T = pl\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2h}\right)^2}$$

Der Ausdruck für T_0 giebt die Spannung im tiefsten Puncte **C** der Curve und zugleich die Horizontalspannung im Aufhängepuncte **B** und in allen andern Puncten; der zweite Ausdruck gilt für die Spannung des obersten Curvenelementes **B** in der eigenen, d. i. in der Richtung der Tangente desselben. Dem Letztern kann man auch nach §. 8 d. II. Abth. die bequemere Form

$$T = pl\ (0{,}96\ \frac{l}{2h} + 0{,}4)$$ geben.

Man sieht aus den Formeln für T_o und T, daß unter übrigens gleichen Umständen die Horizontalspannung in eben dem Verhältnisse wächst, wie die Pfeilhöhe abnimmt, und daß für $h = o$ die Horizontalspannung T_o sowohl, als auch die Spannung T im Puncte B unendlich groß sein müßte, d. h. daß selbst noch so große Kräfte nicht im Stande sein werden, eine schwere Kette oder ein dergleichen Seil vollkommen horizontal auszuspannen.

Bestünde eine Kettenbrücke aus zwei oder mehreren Ketten oder Drahtseilen, welche neben einander und auf ganz gleiche Weise von einem Ufer eines Flußes zum andern ausgespannt und unmittelbar mit der Brückenbahn belegt sind, so kann, wegen der geringen Pfeilhöhe bei Hängebrücken überhaupt und wegen der gleichmäßigen Belastung in diesem Falle, die Spannung der Ketten oder Seile in den Aufhängepuncten auf die oben angegebene Weise gefunden werden. Betrage z. B. bei einer so construirten Brücke die Belastung p. Meter Länge 500 Kil., die Spannweite 40^m, die Pfeilhöhe 2^m, so ist $p = 500$, $l = 20$, $h = 2$ und

$$T = 500 \cdot 20\ (0{,}96\ \frac{20}{2 \cdot 2} + 0{,}4) = 52000 \text{ Kil.}$$

die Spannung für sämmtliche Ketten oder Seile zusammen, und man kann, wenn man die Belastung kennt, welche eine Quadrateinheit des Querschnitts mit Sicherheit trägt, den Gesammtquerschnitt der Kettenschienen oder der Drähte bestimmen.

91. Kettenbrücken, bei welchen die Brückenbahn durch vertikale Tragstangen an die Ketten gehängt ist. — Anstatt die Brückenbahn auf die Ketten zu legen, zieht man es vor, dieselbe unter den Ketten horizontal aufzuhängen, indem man in gleichen Abständen eiserne Tragstangen an die Ketten hängt, von welchen je zwei ein-

ander gegenüber befindliche eine horizontale Querschwelle tragen, welche, durch Langschwellen und diagonale Streben untereinander verbunden und mit starken Bohlen bedeckt, den Brückenboden bilden. Bei einer solchen Anordnung der Brücke kann man, wenn sonst gleichgroße Brückenfelder gleich schwer sind und da das Gewicht der Tragstangen im Verhältnisse zur übrigen Belastung sehr gering ist, die Last als über die Horizontale **MN** (Fig. 56) gleichförmig vertheilt annehmen, so daß nicht mehr gleiche Kettenlängen, sondern gleiche Horizontalprojectionen derselben gleich belastet erscheinen. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die ganze Brückenlast über die gleichweit von einander abstehenden Tragstangenpaare gleichmäßig vertheilen und aus der so gefundenen Belastung eines derselben zunächst ihre Stärke berechnen. Um aber die Gestalt einer so belasteten Kette im Zustande des Gleichgewichts zu finden, sei **u v** (Fig. 157) eine nach dem Verhältnisse der Belastungen in den Puncten **A, B, C...** (Fig. 158) abgetheilte Vertikale, gegen welche der Punct **S** so liegt, daß **uS** der obersten Polygonseite **UA** parallel und der Spannung in derselben proportional ist. Verbindet man die Theilpuncte **a, b, c...** mit dem Puncte **S**, so entsprechen die Linien **aS, bS, cS...** den Spannungen in den ihnen parallelen Polygonseiten **AB, BC, CD...** und **dS** stellt die Spannung der horizontalen Seite **DE** vor. Die Linien AA_1, BB_1, CC_1... (Fig. 158) messen die Abstände der Puncte **A, B, C...** von der durch den tiefsten Punct gelegten Horizontalen **MN** und die Differenz A_1A_2 der Linien AA_1 nnd BB_1, welche den Vertikalabstand der Puncte **A** und **B** der Kettenlinie angiebt, bildet mit A_2B und der Polygonseite **AB** ein Dreieck AA_2B, dessen Seiten der Reihe nach den Seiten des Dreiecks **adS** (Fig. 157) parallel sind. Diese beiden deshalb ähnlichen Dreiecke geben die Proportion

$$AA_2 : A_2B = ad : dS \text{ und folglich}$$

$$AA_2 = \frac{A_2B}{dS} \cdot ad$$

Nimmt man nun an, daß die Projectionen A_1, B_1, C_1... der Puncte A, B, C... gleiche Abstände unter einander haben, so ist $A_2B = A_1B_1 = B_1C_1$ ꝛc. eine unveränderliche Größe und $\frac{A_2B}{dS}$ ein constantes Verhältniß, und man sieht, daß die Differenz zweier benachbarter Perpendikel dem Producte aus diesem Verhältnisse in das Gewicht des zwischen dem ersten derselben und dem Scheitel befindlichen Brückenfeldes gleich ist. Die Summe aller dieser Differenzen zwischen dem horizontalen Elemente und dem Puncte A oder der Vertikalabstand zwischen denselben kann daher durch

$$\frac{A_2B}{dS}\left(cd + bd + \ldots\right)$$

ausgedrückt werden. Bestimmt man die Lage des Punctes A gegen das horizontale Element durch die rechtwinkeligen Coordinaten x und y, bezeichnet die Spannung des tiefsten Elementes durch T_o, das Gewicht jeder Längeneinheit der Brückenbahn durch p, und nimmt an, daß die Puncte A_1, B_1, C_1... die Ordinate y in n Theile theilen, so ist

$$dS = T_o,\ A_2B = \frac{y}{n},\ cd = \frac{py}{n},\ bd = p \cdot \frac{2y}{n}, \ldots ad = p \cdot \frac{ny}{n}$$

$$\text{und}\quad x = \frac{\frac{y}{n}}{T_o}\left\{\frac{py}{n} + \frac{2py}{n} \cdots \frac{npy}{n}\right\}$$

$$= \frac{y}{nT_o} \cdot \frac{py}{n}\left(1 + 2 + \ldots n\right) = \frac{y}{nT_o} \cdot \frac{py}{n} \cdot \frac{n^2}{2}$$

$$= \frac{p}{2T_o} \cdot y^2, \text{ woraus umgekehrt}$$

$$y^2 = \frac{2T_o}{p}\, x \text{ folgt.}$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Kettenlinie für die obigen Voraussetzungen eine Parabel vom Parameter $\frac{2T_o}{p}$ ist,

und man würde, wenn der Scheitel **K** derselben gegeben wäre, die Curve leicht construiren können, da man weiß, daß die Vertikale durch den Scheitel die Abscissenaxe und der Scheitel selbst der Anfangspunct ist. Nun sind aber bei der Anlage der Brücke die Höhen $MU = h$, $NV = h_1$ der Endpuncte **U** und **V** über der Brückenbahn, und die Länge $MN = L$ der letztern als gegeben zu betrachten; man muß daher aus diesen Stücken die Lage des Scheitels zu bestimmen suchen.

Zieht man die Linien **PU**, **QV** und **UV**, erstere parallel mit **MN**, letztre von einem Aufhängepunct zum andern, so wird für den Punct **U** die Abscisse **KP**, die Ordinate **PU**, für den Punct **V** die Abscisse **KQ**, die Ordinate **QV**, und der Gleichung der Kettenlinie zufolge ist

sowohl $\overline{PU}^2 = \frac{2T_o}{p} . KP$, als auch $\overline{QV}^2 = \frac{2T_o}{p} . KQ$,

und $\overline{PU}^2 : \overline{QV}^2 = KP : KQ$, oder da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke **UVP** und **VOQ** auch

$$PU : QV = OP : OQ \text{ ist:}$$
$$\overline{OP}^2 : \overline{OQ}^2 = KP : KQ.$$

Nun ist aber wieder

$$OP = KO - KP \text{ und } OQ = KQ - KO,$$

folglich $(KO - KP)^2 : (KQ - KO)^2 = KP : KQ$ und nach erfolgter Reduction

$$\overline{KO}^2 = KP . KQ = MU . NV = h . h_1,$$

d. h. der Theil der vertikalen Axe zwischen dem Scheitel und der Linie **UV** ist die mittlere Proportionale aus den Abscissen der Endpuncte **U** und **V**. Leicht läßt sich hiernach die Linie **KO** durch Construction finden, wenn man **NV** nach unten verlängert, die Verlängerung $NS = MU$ macht, aus der Mitte von **SV** über dieser Linie einen Halbkreis beschreibt und die Linie **MN** bis **R** verlängert, wo sie die Peripherie des Halbkreises trifft. Denn nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises theilt das Perpendikel **NR**

den Durchmesser **SV** in Theile, zu welchen **NR** die mittlere Proportionale ist. Wird daher aus **N** der Bogen **RT**, beschrieben und durch **T**, eine Parallele mit **MN** gezogen, so schneidet diese Linie **UV** in demjenigen Puncte **O**, durch welchen die Axe gehen muß, um die Horizontale **MN** im Scheitel zu treffen. Hat man auf diese Weise die Lage des Scheitels, mithin auch die Theile $\mathbf{MK} = l$ und $\mathbf{NK} = L - l$ der Brückenbahn gefunden, so kann man durch Einsetzen verschiedener Werthe von **y** in die Gleichung der Kettenlinie und durch Auftragen derselben von **K** aus zu beiden Seiten auf **MN**, eine Reihe von senkrechten Abscissen erhalten, durch deren Endpuncte die Kettenlinie gehen muß, und welche die Längen der Tragstangen bis zur Horizontalen **MN** geben, wenn man den Ordinaten ihre Abstände vom Scheitel gleich setzt. Um aber überhaupt von der Gleichung $y^2 = \frac{2T_o}{p} x$

Gebrauch machen zu können, ist die Kenntniß der Horizontalspannung oder der Spannung T_o des horizontalen Elementes erforderlich. Man darf, um sie zu finden, nur wieder $x = \mathbf{MU} = h$ setzen, so wird $y = \mathbf{KM} = l$ und

$$l^2 = \frac{2T_o}{p} . h \text{ und } T_o = \frac{pl^2}{2h}.$$

Ebenso läßt sich nun auch die Spannung T_n an jedem andern durch seine Coordinaten **x** und **y** gegebenen Puncte finden, wenn man bedenkt, daß in Fig. 157

$$\overline{bS}^2 = \overline{dS}^2 + \overline{bd}^2, \text{ d. h.}$$

$$T_n = \sqrt{T_o^2 + (py)^2} = p\sqrt{y^2 + \left(\frac{l^2}{2h}\right)^2}$$

$$= \frac{py}{2x}\sqrt{4x^2 + y^2}\ ^*).$$

---

*) Noch besteht eine für diesen Gegenstand wichtige Aufgabe darin, die Länge der Kette für gegebene Coordinaten der Aufhänge-

Für den Befestigungspunct U z. B. würde, da $x = h$ und $y = l$ ist,

$$T = p\sqrt{l^2 + \left(\frac{l^2}{2h}\right)^2} = pl\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2h}\right)^2}$$

puncte zu bestimmen, und wir wollen die Auflösung derselben für diejenigen Leser, welche mit dem binomischen Satze und mit der Summirung unendlicher Reihen vertraut sind, hier folgen lassen.

Für irgend einen Punct A der Curve (Fig. 159) ist die Spannung AC die Resultante aus der Vertikalspannung AP und der Horizontalspannung PC, welche letztre an allen Stellen $T_o = \frac{py^2}{2x}$ ist. Bezeichnet nun n wieder die Zahl der gleichen Elemente, in welche die Ordinate y getheilt wurde, ist AB das mte Element vom Scheitel und betrachtet man dasselbe wegen seiner Kleinheit als gerade Linie, so erscheinen die Figuren APC und ADB als ähnliche Dreiecke, in welchen

$$AB : DB = AC : PC \text{ oder } AB = \frac{DB}{PC} \cdot AC \text{ ist.}$$

Nun ist aber

$$DB = \frac{y}{n},\ PC = T_o = \frac{py^2}{2x}$$

die Belastung der Kette von A bis K

$$AP = py \cdot \frac{m}{n} \text{ und } AC = \sqrt{\overline{PC}^2 + \overline{AP}^2}$$

$$= \sqrt{T_o^2 + \left(py \cdot \frac{m}{n}\right)^2},$$

$$\text{mithin } AB = \frac{\frac{y}{n}}{\frac{py^2}{2x}}\sqrt{\left(\frac{py^2}{2x}\right)^2 + \left(\frac{m}{n} \cdot py\right)^2}$$

$$= \frac{y}{n}\sqrt{1 + \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{2x}{y}\right)^2},$$

Dieſe Ausdrücke für T und T_0 ſtimmen genau mit denen überein, welche wir in §. 90 unter der Annahme

---

und nach dem binomiſchen Lehrſatze aufgelöſt:

$$AB = \frac{y}{n}\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{m}{n}\,\frac{2x}{y}\right)^2}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{m}{n}\,\frac{2x}{y}\right)^4}{1.2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{2x}{y}\right)^6}{1.2.3} - + \ldots\right\}$$

Setzt man nun der Reihe nach $m = 1, 2, 3 \ldots n$ und addirt die dafür erhaltenen Werthe, so iſt das Ergebniß nichts anderes, als die Summe der Größen aller Elemente zwiſchen U und K, oder die rectificirte Kettenlinie UK ſelbſt. Dieſe iſt daher

$$S = \frac{y}{n}\left\{\Sigma(1) + 2\Sigma\left(\frac{x}{y}\,\frac{m}{n}\right)^2 - 2\Sigma\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{m}{n}\right)^4\right.$$

$$\left. + 4\Sigma\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{m}{n}\right)^6 - + \ldots\right\}.$$

Für eine ſehr große Zahl n von Elementen iſt

$$\Sigma(1) = n.$$

$$2\Sigma\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{m}{n}\right)^2 = 2\left(\frac{x}{yn}\right)^2 (1^2 + 2^2 + \ldots n^2)$$

$$= 2\left(\frac{x}{yn}\right)^2 \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot n$$

$$2\Sigma\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{m}{n}\right)^4 = 2\left(\frac{x}{yn}\right)^2 (1^4 + 2^4 + \ldots n^4)$$

$$= 2\left(\frac{x}{yn}\right)^4 \cdot \frac{n^5}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot n$$

$$4\Sigma\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{m}{n}\right)^6 = 4\left(\frac{x}{yn}\right)^6 (1^6 + 2^6 + \ldots n^6)$$

$$= 4\left(\frac{x}{yn}\right)^6 \cdot \frac{n^7}{7} = \frac{4}{7}\left(\frac{x}{y}\right)^6 \cdot n$$

folglich $S = y\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{y^2} - \frac{2}{5}\,\frac{x^4}{y^4} + \frac{4}{7}\,\frac{x^6}{y^6} - + \ldots\right)$,

einer sehr geringen Pfeilhöhe auch für die gemeine Kettenlinie gefunden hatten.

---

eine Reihe, von welcher die ersten Glieder um so mehr genügen, je kleiner die Pfeilhöhe im Verhältnisse zur Spannweite ist.

Nach v. Gerstner ist die Prager Kettenbrücke im Ganzen 750 öster. Fuß lang und es kommen davon $2l = \frac{3}{5} . 750 = 450$ Fuß auf den mittleren Bogen zwischen den beiden Tragpfeilern, über deren Sättel die Ketten herab nach den Verankerungen gehen, so daß auf die beiden Seitenbögen zusammen 300 Fuß Länge kommen. Die Höhe der Sättel über dem Scheitel beträgt $h = 34$ Fuß und die Belastung eines laufenden Fußes Brückenbahn $p = 5080$ öster. Pfund mit Einfluß der größten zufälligen Belastung. Die Horizontalspannung für jeden Punct ist daher am mittlern Brückenfelde $T_0 = \frac{5080 . 225^2}{2 . 34} = 3803450$ ℔, die Vertikalspannung, welche dieses Brückenfeld auf jeden der Pfeiler hervorbringt, $5080 . 225 = 1143000$ ℔, und die Spannung daselbst in der eigenen Richtung der Kette

$$5080 . 225 \sqrt{1 + \left(\frac{225}{2 . 34}\right)^2} = 3950900 \text{ ℔.}$$

Die Länge der zur Überspannung der Weite von 450 Fuß nöthigen Kette ist

$$2S = 2 . 225 \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{34}{225}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{34}{225}\right)^4 + - \ldots\right]$$

$= 456{,}75$ öster. Fuß beiläufig.

X.

Stabilität. Schiefe Ebene. Reibung gleitender Körper. Seilesreibung. Keil.

92. Gleichgewicht eines Körpers, welcher sich gegen eine unbewegliche Ebene stützt. —

Wenn zwei Körper, welche sich berühren, sich zusammendrücken, so sehen wir immer, daß die Tiefe des entstehenden Eindrucks rechtwinkelig gegen die Berührungsfläche der Körper ist und müssen daraus schließen, daß dieselben ebenfalls in dieser Richtung aufeinander zurückwirken. Eine feste unbewegliche Ebene wird daher auf einen Körper, gegen welchen Kräfte so wirken, daß ihre Mittelkraft mit jener Normale zusammenfällt, eine Rückwirkung äußern, welche diese Mittelkraft gerade aufhebt, und der Körper wird unter diesen Verhältnissen in Ruhe bleiben. Ueberhaupt werden die Bedingungen des Gleichgewichts ganz die nämlichen sein, wie für einen freien Körper, wenn man unter die auf denselben wirkenden Kräfte noch eine der Rückwirkung der Ebene gegen den Körper gleiche aufnimmt. Wir werden daher leicht die Verhältnisse ausmitteln können, unter welchen ein Körper im Gleichgewichte ist, welcher mit einem, mit zwei, drei oder mehreren Puncten sich gegen eine Ebene stützt.

Berührt nur ein Punct des Körpers die Ebene, so muß nicht allein die Resultante aller auf den Körper wirkenden Kräfte normal gegen die Ebene gerichtet sein, sondern sie muß auch durch den Berührungspunct gehen. Denn

wäre diese Mittelkraft, indem sie durch den Stützpunct geht, nicht normal zur Ebene, so könnte man sie in zwei Seitenkräfte zerlegen, von welchen die zur Ebene rechtwinkelige durch den Widerstand derselben aufgenommen, die in die Ebene fallende aber Bewegung hervorbringen und das Gleichgewicht stören würde. Und ginge sie nicht zugleich durch den Berührungspunct, so würde der Widerstand, welchen die Ebene entgegensetzt, nicht mit der Mittelkraft in eine Linie fallen, diese also nicht aufheben können.

Ist noch ein zweiter Punct da, mit welchem der Körper die Ebene berührt, so muß zwar die Resultante der Kräfte ebenfalls normal zur Ebene sein, aber es ist nicht durchaus erforderlich, daß sie durch einen der Berührungspuncte geht, sondern es reicht hin, daß ihre Richtung die Verbindungslinie derselben schneidet. Die Rückwirkungen in den Berührungspuncten, beide normal zur Ebene und mithin parallel unter sich, können nämlich nur dann die Resultante der Kräfte aufheben, wenn diese sich in zwei Componenten zerlegen läßt, welche den Widerständen oder Rückwirkungen in den Stützpuncten gleich und entgegengesetzt sind und folglich durch diese Puncte selbst gehen. Die Resultante zweier paralleler Kräfte ist aber nicht allein denselben wieder parallel, d. i. in diesem Falle normal zur Ebene, sondern ihre Richtung schneidet auch die gerade Linie, welche die Componenten derselben verbindet, d. i. die Verbindungslinie der Stützpuncte.

Bei drei Berührungspuncten zwischen der Ebene und dem Körper kann man sich zu den äußeren Kräften, welche auf denselben wirken, in den Berührungspuncten noch drei andere den Widerständen daselbst gleiche und zur Ebene normale Kräfte hinzudenken. Die Resultante jener wird daher, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, ebenfalls rechtwinkelig gegen die Ebene gerichtet sein und ihre Richtung durch das Dreieck gehen müssen, dessen Seiten die drei Berührungspuncte verbinden. Auch für mehr als drei Stützpuncte, für eine Berührungsfläche, erfordert das Gleichgewicht, daß

die Resultante der auf den Körper wirkenden Kräfte senkrecht gegen die Ebene sei und dieselbe innerhalb der Berührungsfläche oder der Figur schneide, deren Seiten durch die Berührungspuncte begrenzt werden.

93. Beispiele. — Stabilität. — Eine Kugel, auf welche außer der Schwere weiter keine Kraft wirkt, ist auf einer Horizontalebene in jeder Lage im Gleichgewichte, denn die durch den Schwerpunct gehende Senkrechte geht auch durch den Berührungspunct und ist normal zur Ebene. Dieses Gleichgewicht ist indifferentes, weil der Schwerpunct weder steigt noch fällt, wenn die Kugel aus einer Lage in eine andere gebracht wird. Wirkt auf einen Tisch, welcher mit 3 Füßen **A**, a, a, (Fig. **161**) auf einer Horizontalebene steht, ein schwerer Körper durch sein Gewicht so, daß die Vertikale durch den Schwerpunct **G** die Ebene innerhalb des Dreiecks Aaa_1 trifft, so ist offenbar der Tisch im Gleichgewichte. Fällt dagegen die Projection des Schwerpuncts **G** zur Horizontalebene außerhalb dieses Dreiecks, so dreht sich der Tisch um die zunächst liegende Seite aa_1 und fällt um, sofern er selbst gewichtlos ist. Im letztern Falle ist also kein Gleichgewicht, im erstern stabiles vorhanden. Liegen die drei Berührungspuncte der Füße und der Ebene in einer geraden Linie Aa_1 (Fig. **160**) und wird diese von der Senkrechten durch den Schwerpunct **G** getroffen, so findet zwar Gleichgewicht statt, aber nicht stabiles, denn der Schwerpunct wird sinken und der Tisch sofort umfallen, sobald er nur im Geringsten aus dieser Lage gebracht wird. Soll also ein Körper *Stabilität* oder *Standfähigkeit* besitzen, d. h. soll das Gleichgewicht stabil sein, so muß die Projection seines Schwerpuncts gegen die Unterstützungsebene in die Berührungsfläche oder in die Figur fallen, welche durch die Berührungspuncte gebildet wird. Der Widerstand, welchen er alsdann einer Kraft entgegensetzt, die ihn um eine Kante zu drehen und umzuwerfen strebt, wird durch das statische Moment des Körpergewichts, d. i. durch das Product aus seinem Gewichte in den Abstand gG

(Fig. 161) dieser Kante von der Senkrechten durch den Schwerpunct gemessen, welches man deshalb das Moment der Stabilität in Bezug auf diese Kante nennt. In dem Falle, wo die Senkrechte durch den Schwerpunct die Ebene außerhalb der Berührungsfläche trifft, ist das Moment der Stabilität negativ, d. h. der Körper hat ein Bestreben zum Umfallen, welches man ebenfalls durch das Moment des Gewichts in Bezug auf die Drehkante ausdrücken kann. Im letztern Falle endlich, wo die Senkrechte durch den Schwerpunct durch die Drehkante geht, und die geringste Kraft hinreicht, ihn umzuwerfen, ist der Hebelsarm des Gewichts Null, mithin auch das Moment der Stabilität. Der Widerstand eines Körpers gegen das Umwerfen ist also um so größer, je weiter die durch den Schwerpunct gezogene Vertikale von dem Umfange entfernt, je größer im Allgemeinen die Grundfläche ist. So lange der Körper noch nicht aus der Lage des stabilen Gleichgewichts gebracht ist, hängt dieser Widerstand nicht von der Höhe des Schwerpuncts über der Grundfläche ab, weil der Hebelsarm ag (Fig. 162) der nämliche bleibt, ob der Schwerpunct in G oder in G_1 liegt. Sowie aber der Körper aus dieser Lage entfernt ist, wird der Hebelsarm ag, also auch der Widerstand gegen das Umkanten oder das Bestreben, zum stabilen Gleichgewichte zurückzukehren, von der Höhe des Schwerpuncts über der Grundfläche ac abhängig; je größer diese Höhe ist, desto kleiner wird jener, desto mehr nähert sich die Lage des Schwerpuncts der des nichtstabilen Gleichgewichts. Erleidet die Mauer eines Gebäudes durch das Dach oder durch ein Gewölbe einen Seitenschub, so strebt dieser, sie um ihre äußere Kante zu drehen, und ohne das Gewicht und Volumen der Mauer in gleichem Maße zu vermehren, kann man die Stabilität derselben dadurch vergrößern, daß man den Schwerpunct von der senkrechten Ebene durch die Drehkante entfernt, indem man Dossirungen, Pfeiler, Plinthen und dergleichen anbringt. Ein schiefes Prisma oder ein schiefer Cylinder (Fig. 164) wird

Stabilität besitzen, so lange noch die Senkrechte durch den Schwerpunct die Basis schneidet. Der Widerstand gegen das Umwerfen oder das Moment der Stabilität ist **P . mg** und dieser Werth bleibt positiv, so lange g innerhalb, und wird negativ oder drückt das Bestreben zum Umfallen aus, sobald g außerhalb der Basis liegt. Wenn außer der Schwere noch andere Kräfte auf einen Körper wirken, so muß, wie wir gesehen haben, die Resultante aller noch durch die Basis gehen, wenn keine Drehung erfolgen soll. Es können daher solche Kräfte einem Körper Stabilität gewähren, welcher an sich keine besitzt. Bei einem schiefen Prisma (Fig. **163**), dessen Schwerpunct seine Horizontalprojection außerhalb der Basis hat, auf welches aber eine Kraft in der Richtung **FK** wirkt, wird daher Stabilität bestehen, wenn die Mittelkraft **GO** durch die Basis **AB** geht. Eine Mauer, bestimmt den Druck einer lockern Masse aufzunehmen, z. B. Erddruck abzuhalten, befindet sich in diesem Falle; man muß ihr entweder so viel Stärke, oder um Material zu ersparen, so viel Böschung geben, daß die Resultante der auf die Mauer wirkenden Kräfte die Basis noch trifft. Ist aber der Grund weich und zusammendrückbar, so genügt dies nicht zur Stabilität, es muß auch noch der Durchschnittspunct der Resultante in der Basis mit dem Schwerpuncte derselben zusammenfallen, weil außerdem der Druck gegen den nachgiebigen Grund auf der einen Seite dieses Schwerpuncts größer sein würde, als auf der anderen, und eine Drehung um denselben hervorbringen müßte. Die einseitige Belastung eines zweiräderigen Wagens (Fig. **165**), welcher auf der Horizontalebene gefahren wird, ist stets eine Ursache der Ermüdung für die Zugthiere, denn das Bestreben der Ladung, nach einer Seite umzuschlagen, übt entweder einen Druck auf dieselben aus oder sucht sie zu heben. Befindet sich aber der Schwerpunct in der Vertikalebene durch die Wagenare, so heben die Widerstände des Bodens gegen die beiden Stützpuncte der Räder die zwei parallelen Componenten des Gewichts vollständig auf.

94. Gleichgewicht eines Körpers auf der schiefen Ebene. — Wenn ein Körper sich auf eine schiefe Ebene stützt und die Resultante der auf ihn wirkenden Kräfte nicht normal zur Ebene ist, so kann der Widerstand oder die Rückwirkung derselben nur diejenige Componente der Mittelkraft aufheben, welche senkrecht zur Ebene ist, während die andere, der Ebene parallele Componente, Bewegung hevorbringt. In diesem Falle befindet sich immer ein Körper auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene, wenn weiter keine Kraft, als die Schwere auf ihn wirkt. Die entstehende Bewegung ist eine gleitende, wenn die Lothlinie durch den Schwerpunct durch die Basis, eine drehende, wenn sie an der Basis vorbeigeht. Eine Kugel wird daher, weil die Senkrechte **GH** (Fig. **166**) nie durch den Berührungspunct **m** gehen kann, von der schiefen Ebene nicht herabgleiten, sondern herabrollen.

Stellen wir uns unter **ABC** (Fig. **167**) den Vertikaldurchschnitt einer schiefen Ebene nach einer Linie der größten Neigung vor und unter p eine derselben parallele Kraft, welche die Bewegung der Kugel verhindern soll, so muß behufs des Gleichgewichts die Resultante **GM = N** der Kraft p und des Gewichts **P** der Kugel durch den Stützpunct **m** gehen und winkelrecht gegen **AB** gerichtet sein. Die Seite **GR** des Parallelogramms **GRMG**$_1$ giebt daher die Intensität der Kraft p an, wenn **GG**$_1$ dem Gewichte **P** proportional und **GM** normal zu **AB** ist. Wenn nun noch die Neigung der schiefen Ebene durch die Grundlinie **AC** und die Höhe **BC** einer gewissen Länge derselben gegeben ist, so fehlt nichts mehr zur Bildung des Dreiecks **MRG** und somit auch zur Bestimmung der Kraft **p = GR**. Aus der Gleichheit der Winkel bei **R** und **B** folgt die Aehnlichkeit der bei **G** und **C** rechtwinkeligen Dreiecke **MRG** und **ABC**, welche die Proportion

$$GR : MR : GM = BC : AB : AC$$

oder

$$p : P : N = BC : AB : AC,$$

nach welcher für den Gleichgewichtszustand die mit der schiefen

Ebene parallele Kraft der Höhe, das Gewicht des Körpers der Länge und die Resultante beider oder der Normaldruck der Grundlinie der schiefen Ebene proportional ist.

Für den Fall, daß die Kraft p, welche den Körper auf der schiefen Ebene erhalten soll, horizontal gerichtet ist, muß natürlich ebenfalls wieder die Mittelkraft $GM = R$ (Fig. 168) normal gegen **AB** gerichtet sein. Das Dreieck **GMR** aber, dessen Seiten die Kräfte repräsentiren, ist hier wieder dem Dreiecke **ABC** ähnlich, weil jede Seite des einen zu einer Seite des andern normal ist; man erhält daher

$$GR : MR : GM = BC : AC : AB$$

oder

$$p : P : N = BC : AC : AB.$$

Diese Proportion zeigt, daß die horizontale Kraft der Höhe und der Normaldruck der Länge der schiefen Ebene ebenso proportional ist, wie die Grundlinie dem Gewichte des Körpers. Im ersten Falle ist die Kraft $p = \frac{BC}{AB} \cdot P$,

im zweiten $p = \frac{BC}{AC} \cdot P$ und man sieht, daß die Kraft, welche in dem einen oder in dem andern nöthig ist, um den Körper auf der schiefen Ebene zu erhalten, immer gleich ist dem Producte seines Gewichtes und der Höhe, dividirt durch diejenige Seite der schiefen Ebene oder des Dreiecks **ABC**, zu welcher die Kraft parallel wirkt.

95. Bewegung auf der schiefen Ebene. — Wie schon im vorigen Paragraphen bemerkt wurde, wird die Bewegung eines auf der schiefen Ebene sich selbst überlassenen Körpers durch diejenige Componente seines Gewichts bewirkt, welche mit der Ebene parallel gerichtet ist, während die zu ihr normale Componente durch den Widerstand aufgehoben wird. Die bewegende Kraft wird daher genau derjenigen gleich sein, welche, ebenfalls parallel mit der Ebene, aber in entgegengesetzter Richtung wirkend, die Bewegung zu verhindern vermochte und $\frac{BC}{AB} \cdot P$ gefunden wurde.

Diese Componente des Körpergewichts ist aber, da $\frac{BC}{AB}$ für eine und dieselbe Ebene ein unveränderliches Verhältniß ist, so gut eine constante Kraft, wie die Schwerkraft selbst; sie bringt daher wie diese, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervor, deren Geschwindigkeitszunahme g_1 sich zu der des freien Falls verhält, wie die erwähnte Componente zum ganzen Gewichte des Körpers; dies giebt

$$g_1 : g = \frac{BC}{AB} \cdot P : P \text{ oder } g_1 : g = BC : AB$$

und $$g_1 = \frac{BC}{AB} \cdot g.$$

Wir sehen daraus, daß sich die Beschleunigung auf der schiefen Ebene zu der des senkrechten Falls auch wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge verhält, und daß g_1 stets kleiner sein muß, als g. Man kann daher auf diese Weise irgend eine Bewegung erzeugen, bei welcher die Geschwindigkeitszunahme g_1 einen beliebigen Werth, kleiner als g, hat, und bei welcher die Schnelligkeit der Bewegung und der Luftwiderstand, welche beim freien Falle die genaue Messung der durchlaufenen Räume und verflossenen Zeit so außerordentlich erschweren, klein genug sind, um diese Beobachtungen zu gestatten. Auf diesem Wege hat Galilei durch Versuche die Gesetze des freien Falls ermittelt.

Wüßte man z. B., daß eine gleichförmig beschleunigte Bewegung sich bequem beobachten und messen lasse, wenn die Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde nur 0,1 Meter beträgt, so würde man der schiefen Ebene eine solche Neigung geben müssen, daß $\frac{BC}{AB} = \frac{0{,}1}{9{,}81}$, oder daß auf 981^m Länge 10^m Steigung kommen.

96. Reibung auf einer Ebene. — Ein Körper, welcher unter der Wirkung von Kräften auf einer Ebene im Gleichgewichte ist, müßte durch die geringste Kraft, welche

in der Richtung der Ebene hinzukommt, in Bewegung gesetzt werden, wenn nicht an den Berührungsflächen des Körpers mit der Ebene durch die Bewegung gewisse Veränderungen vorgingen, welche eine Arbeitsgröße und folglich auch eine Kraft zur Ueberwindung des Widerstandes in Anspruch nehmen, den die Berührungsflächen diesen Veränderungen entgegensetzen. So glatt wir auch die Oberfläche eines Körpers machen mögen, so bleibt doch dieselbe noch weit entfernt von dem, was wir uns unter einer mathematischen Fläche vorstellen. Alle noch so stark polirten Flächen werden daher noch Unebenheiten besitzen, vermöge welcher sich die Molecule gegenseitig zusammendrücken, verschieben, abschleifen oder abreißen. Und wäre selbst die Politur ganz vollkommen, so würden doch vermöge der Rückwirkung beider Körper gegen einander die Molecule des einen in die Poren des andern eindringen und so der Bewegung widerstehen. Nächst dem ist aber noch ein zweiter Widerstand, die Adhäsion, zu überwinden, welcher seine Ursache in der gegenseitigen Anziehung der Molecule in den Berührungsflächen hat. Während jener von dem Drucke, nicht aber von der Größe der sich reibenden Flächen abhängt, ist dieser unabhängig von der Intensität dieses Druckes und proportional der Anzahl der Berührungspuncte oder der Größe der Berührungsflächen. Obschon also der Widerstand, welchen die Berührungsflächen der Bewegung entgegensetzen, zwei verschiedene Ursachen hat, worauf auch von verschiedenen Physikern Rücksicht genommen worden ist, so hat doch die Adhäsion in den meisten Fällen einen so geringen Einfluß, daß man in der Praxis von demselben absehen und den gesammten Widerstand als von der ersten Ursache herrührend betrachten und durch den Namen Reibung bezeichnen darf.

Mit Hülfe einer Federwage kann man leicht die Größe der Reibung eines Körpers unter einer bestimmten Belastung auf der Horizontalebene (Fig. 169) unmittelbar messen. Sie ist der Kraft gleich, welche man in horizontaler Richtung anwenden muß, um den Körper in eine gleichförmige

Bewegung zu versetzen und welche der Index an der Theilung des Instrumentes anzeigt. Auch die geneigte Ebene kann dazu dienen, den Widerstand der Reibung einer Substanz zu finden. Denn zerlegt man das Gewicht P des Körpers (Fig. 170) in zwei Componenten, eine normal, die andere parallel zur schiefen Ebene, so ist es die letztere, welche die Bewegung hervorzubringen und die Reibung zu überwinden strebt. Der Körper wird daher nicht eher zu gleiten anfangen, als bis die Neigung der Ebene so groß geworden ist, daß die Componente $\frac{BC}{AB} \cdot P$ dem Reibungswiderstande gleich ist, woraus dieser selbst

$$F = \frac{BC}{AB} \cdot P$$

erhalten wird.

Die Versuche von Amontons, Coulomb, Vince, Remie und Morin sind es hauptsächlich, denen wir die genauere Kenntniß der Gesetze, nach welchen die Reibung von dem Drucke, der Größe der Flächen, dem Zustande der Bewegung u. s. f. abhängt, zu danken haben.

97. Gesetze der Reibung der auf einer Ebene gleitenden Körper. — Den empirischen Untersuchungen gemäß befolgt die Reibung gleitender Körper folgende Gesetze:

1) Die Reibung ist dem ganzen, auf die reibenden Flächen ausgeübten Drucke proportional. Je größer der Normaldruck, d. i. die Summe oder Differenz der zur Berührungsfläche normalen Componenten aller auf den Körper wirkenden Kräfte ist, um so inniger ist der Eingriff der Molecule in den sich berührenden Flächen, um so größer also der Widerstand, welchen sie ihrer Verschiebung, Zusammendrückung u. s. w. entgegensetzen.

2) Die Reibung hängt nicht ab von der Größe der Berührungsfläche. Die Reibung eines Körpers mit mehreren ebenen Flächen wird sich daher nicht

ändern, wenn man ihn bald auf der einen, bald auf der andern dieser Flächen gleiten läßt, sofern nur alle übrigen Verhältnisse dieselben bleiben. Wird auch die Zahl der Flächenelemente größer, so wird doch dadurch der Gesammtwiderstand nicht vergrößert, weil der Druck auf ein Element in demselben Verhältnisse abnimmt, wie die Zahl der Elemente wächst. Bei so großen Pressungen, wie sie bei kräftigen Maschinen vorkommen, findet dieser Satz seine volle Anwendung, weil die Adhäsion im Verhältnisse zur Reibung sehr gering ist. Bei geringem Drucke aber, z. B. in dem zarten Mechanismus einer Uhr, übt die Adhäsion, welche mit der Berührungsfläche wächst, einen verhältnißmäßig großen Einfluß, so daß die Größe der reibenden Flächen nicht mehr gleichgiltig ist.

3) Die Reibung ist bei bewegten Körpern von der Geschwindigkeit der sich reibenden Flächen unabhängig. Unter übrigens gleichen Verhältnissen bleibt also die Reibung die nämliche, mit welcher Geschwindigkeit auch die Körper über einander hingleiten mögen. Nur wenn viele Körpertheilchen wirklich losgerissen werden, und ihre Trägheit Einfluß auf den Widerstand gewinnt, nimmt dieser mit der Geschwindigkeit der gleitenden Körper schnell zu. Dies ist z. B. der Fall bei sehr weichen und im erhöhten Grade noch bei flüssigen Körpern, deren Reibungsgesetze deshalb ganz verschieden von denen der festen Körper sind.

Uebrigens ist es einleuchtend, daß die Größe der Reibung verschieden ist nach der Substanz der sich reibenden Körper, daß sie von der Beschaffenheit der Berührungsflächen, der Adhäsion, der Temperatur und überhaupt von sehr vielen und mannichfaltigen Umständen abhängt, welche sich nicht auf allgemeine Gesetze zurückführen lassen. Wir werden daher in den nächstfolgenden Paragraphen die Ursachen kennen lernen, welche vorzüglich auf die Intensität der Reibung von Einfluß sind.

98. Einfluß des Grades der Glätte der Berührungsflächen auf die Größe der Reibung.

— Es versteht sich, nach dem, was wir über die Ursachen des Reibungswiderstandes gesagt haben, von selbst, daß derselbe um so kleiner werden muß, je weniger und je kleinere Unebenheiten die gleitenden Flächen haben. Nach den Erfahrungen Coulomb's erreichen die Flächen den für die Verhältnisse, unter welchen sie angewendet werden sollen, vortheilhaftesten Grad der Politur, wenn sie durch den Gebrauch selbst oder unter demselben Drucke und mit derselben Bewegung, wie beim Gebrauche, und mit fettigen Substanzen bestrichen, polirt werden. Bei Maschinen, welche schon längere Zeit im Gange waren, findet man daher auch die Reibung immer geringer, als zur Zeit ihrer Aufstellung, selbst wenn in der Werkstätte, aus welcher sie kamen, die größte Sorgfalt auf die Politur der Reibungsflächen verwendet wurde. Die Unebenheiten der Flächen haben durch den Gebrauch selbst die passendste Anordnung erhalten, welche den obwaltenden Verhältnissen des Drucks und der Bewegung entspricht, und die größte Zusammendrückung und Verdichtung erreicht, deren sie unter denselben fähig sind.

Läßt man die Flächen trocken sich reiben, so verändern sich nach längerem Gebrauche die ursprünglich bestpolirten Flächen zum Nachtheile; es reißen sich, besonders bei Hölzern ist dies bemerkbar, kleine Theilchen los, welche, indem sie sich vermöge des Druckes und der Bewegung zu kleinen, sehr harten Körnchen zusammenrollen, mehr oder weniger tiefe Furchen in die Flächen graben. In noch viel höherem Grade wird dies der Fall sein, wenn das Poliren trocken und mit pulverförmigen Polirmitteln oder Bimsstein, Schachtelhalm und dergleichen vorgenommen wird.

Wir sehen hieraus, wie viel bei der Reibung von der Zurichtung der Flächen abhängt, daß der Grad, bis zu welchem die Politur gebracht werden kann, nicht allein von der Politurfähigkeit und Härte der Körper, sondern auch

von dem Drucke, dem Polirmittel und selbst der Bewegung abhängt, durch welche sie erzeugt wird, und daß unter Umständen, wie sie bei den reibenden Flächen schon gebrauchter Maschinen stattfinden, die Politur ihre relative Grenze erreichen kann.

99. Einfluß der Schmiermittel. — Wenn zwischen die reibenden Flächen fettige und weiche Substanzen gebracht werden, wodurch die Poren und Zwischenräume der Unebenheiten ausgefüllt werden und der Eingriff derselben sich vermindert, so wird dadurch der Reibungswiderstand kleiner, während die Klebrigkeit dieser Körper und ihre Adhäsion an den Flächen einen andern Widerstand erzeugt, welcher im Verhältnisse zur Reibung um so größer wird, je kleiner der Druck ist und je größer die Berührungsflächen sind. Wird daher einerseits die Reibung in dem Maaße vermindert, als die Schmiermittel zäh und klebrig sind, so kann andrerseits die Zähigkeit derselben einen Widerstand hervorrufen, welcher möglicherweise jenen Vortheil aufhebt oder selbst überwiegt. Besonders wird dies diejenigen Schmiermittel treffen, welche viel von harzigen Substanzen enthalten, und selbst die besseren Schmiermittel verlieren durch den längeren Gebrauch, indem sie sich mit abgeriebenen Theilchen vermischen, zum Theil ihre Fettigkeit und ursprüngliche Weichheit, wenn nicht das Schmieren fleißig wiederholt wird. Wählt man aber überhaupt nicht zu klebrige Substanzen, so wird, besonders wenn die Berührungsflächen klein sind, die Adhäsion hinreichend klein, um ganz übersehen werden zu können. Was die Flüssigkeiten anlangt, so ist durchaus nicht jede geneigt, den Widerstand zu vermindern. Die Versuche haben vielmehr gezeigt, daß manche, namentlich bloses Wasser, die Reibung sowohl zwischen porösen Körpern, wie Holz, als auch bei sehr harten, wie Gußeißen, vermehren. Daß faserige und poröse Körper durch das Wasser aufquellen, befördert jedenfalls den Eingriff der Unebenheiten und erklärt die Vermehrung der Reibung. Daß aber bei Gußeisen, mit Wasser benetzt, der Widerstand so beträchtlich

ist, wie ihn Morin's Versuche geben, muß wohl einem chemischen Vorgange zugeschrieben werden, ähnlich demjenigen, welcher sich kund giebt, wenn man mit einem, mit schwachen Essig benetzten Finger eine Glasfläche reibt.

Ebenso wenig, wie das Wasser, eignet sich für Holzarten das Oel zum Schmieren, weil es ebenfalls ein Aufschwellen derselben bewirkt; für Metalle jedoch und wenn es ganz frisch angewendet wird, bildet es ein wenigstens ebenso vortreffliches Schmiermittel, wie Schweinefett, Seife und Talg, besonders wenn die Benetzung der Reibungsflächen mit demselben ununterbrochen erfolgt. Gewöhnlich bedient man sich des Oeles bei zarteren, der übrigen Substanzen bei kräftigern Maschinen.

100. Einfluß der Dauer der Berührung. Reibung der Ruhe und Reibung während der Bewegung. — Die harten und elastischen Körper haben die Eigenschaft, sich weit schneller zusammendrücken und ausdehnen zu lassen und weit eher die der angewendeten Kraft entsprechende Grenze dieser Zusammendrückung oder Ausdehnung zu erreichen, als weiche Körper. Bei erstern wird daher eine kurze Zeit der Berührung schon den stärksten Eingriff der Unebenheiten der Berührungsflächen herbeiführen, welchen der vorhandene Druck bewirken kann, während bei diesen eine längere Berührung hierzu nöthig ist. Außerordentlich klein für Metalle, beträgt diese Zeit schon mehrere Minuten bei Hölzern, und mehrere Stunden selbst Tage bei Hölzern, welche sich ungeschmiert auf Metallen reiben. Es kann demnach nicht auffallen, wenn die Reibungsversuche gezeigt haben, daß Holz auf Holz und Metall, aus einer längere Zeit andauernden Ruhe in Bewegung übergehend, eine größere Reibung verursachen, als wenn sie in beständiger Bewegung waren. Schützen z. B., welche lange Zeit nicht gezogen wurden, setzen der Bewegung im ersten Augenblicke eine sehr beträchtliche Reibung entgegen, welche jedoch abnimmt, wenn die Bewegung einmal eingeleitet ist. Auch bei Anwendung von Schmiermitteln und dann selbst bei har-

ten Körpern tritt diese Erscheinung auf, indem bei längerer Berührung diese Substanzen mehr und mehr herausgepreßt werden, so daß die Flächen in nur fettigem Zustande sind. Besonders ist dies bei Anwendung des Schweinefettes der Fall, bei welcher die Reibung erst nach mehreren Stunden der Ruhe ihren größten Werth annimmt. Für sehr kleine Berührungsflächen, für blose abgerundete Kanten oder Spitzen, erreicht die Zusammendrückung bald ihre Grenzen, und die Reibung ist unabhängig von der Dauer der Berührung, sei es, daß fette Substanzen angewendet werden oder nicht. Uebrigens ist es klar, daß die Reibung, im Augenblicke, wo die Bewegung beginnt, größer als während der Bewegung, allmählich von ihrem größten zu ihrem kleinsten Werthe übergehen muß, so daß in den ersten Augenblicken die Größe der Reibung als von der Geschwindigkeit abhängig erscheint. Für die praktische Mechanik ist es jedoch gänzlich erläßlich, auf diese Veränderlichkeit der Reibung Rücksicht zu nehmen, und es genügt, die Größe der Reibung für die andauernde Bewegung und für den Uebergang aus der Ruhe in Bewegung zu kennen.

101. Einfluß der Temperatur, Gestalt der Flächen, Textur 2c. — Obschon der Wärme, indem sie die Cohäsion und Elasticität der Körper vermindert und die Schmiermittel erweicht, Einfluß auf die Größe der Reibung zugestanden werden muß, so ist doch derselbe innerhalb der engen Grenzen, in welchen die Temperatur der Atmosphäre wechselt, viel zu gering, um Beachtung zu verdienen. Geschieht aber die Bewegung sehr schnell und reiben sich ungeschmierte Flächen, so entwickelt sich durch die Reibung selbst Wärme, welche sich bis zum Flüssigwerden der Schmiermittel, zum Erweichen der Metalle, Verkohlen, ja selbst Anbrennen des Holzes steigern kann. Ein hoher Grad der Politur, fleißige Wiederholung des Schmierens und überhaupt alle die Mittel, durch welche man der zu schnellen Abnutzung und der damit verknüpften Vergrößerung der Reibung vorbeugt, werden daher auch gegen diese Vermehrung

des Widerstandes durch Selbsterhitzung der reibenden Flächen gerichtet sein.

Was die Gestalt der reibenden Flächen anlangt, so haben die Versuche gezeigt, daß die Größe der Reibung sich darnach nicht richtet oder doch nur insofern, als bei sehr kleinen Flächen die Schmiermittel herausgepreßt werden, so daß solche Flächen immer nur als blos fettig anzunehmen sind.

Man hat geglaubt, daß Körper von gleichartiger Textur mehr Reibungswiderstand verursachen, als solche von ungleichartiger, daß z. B. Eisen und Stahl auf Kupfer oder Messing weniger Reibung geben, als auf Eisen und Stahl. Allein die Versuche Morin's bestätigen dies für Metall nicht und zeigen nur, daß trockene und ungeschmierte Hölzer größere Reibung geben, wenn die Fasern parallel sind und die Bewegung gegen den Spahn erfolgt, als wenn sie sich kreutzen oder Hirn- auf Hirnholz reibt.

Uebrigens hat man noch die Erfahrung gemacht, daß eine schwache Erschütterung die Trennung der Oberflächen und Bewegung bewirkt, noch ehe die Kraft so groß geworden ist, um die Reibung der Ruhe zu überwinden, und schon, wenn sie der während der Bewegung genügt. In allen Fällen also, wo bei der Stabilität der Constructionen die Reibung in's Spiel kommt, darf dem Verhältnisse der Reibung zur Pressung nur höchstens derjenige Werth beigelegt werden, welcher der Bewegung entspricht.

102. Bestimmung des Reibungswiderstandes. Reibungscoefficienten und Reibungswinkel. — Wir haben erfahren, daß die Reibung bei gleichbleibendem Drucke sich genau verhält, wie eine constante Kraft, daß sie als beständiger und unveränderlicher Widerstand während der Bewegung, diese gleichförmig zu verzögern strebt, gleich wie z. B. die Schwere das Aufsteigen eines geworfenen Körpers. Die Proportionalität zwischen der Reibung und dem Drucke zeigt uns aber auch ferner, daß, wenn für zwei Körper der Widerstand F_1 der Reibung bei einem Drucke N_1 gefunden worden ist, hieraus die zur Ueberwindung der Reibung

erforderliche Kraft F bei einem andern Drucke N zwischen denselben Substanzen und bei gleichem Oberflächenzustande derselben, bestimmt werden kann. Denn da

$$F : F_1 = N : N_1, \text{ so folgt } F = \frac{F_1}{N_1} . N,$$

oder wenn wir das, wegen der Unabhängigkeit der Reibung von der Geschwindigkeit und der Größe der Flächen constante, Verhältniß $\frac{F_1}{N_1}$ mit f bezeichnen,

$$F = f . N.$$

Der Factor f, gewöhnlich der Reibungscoefficient genannt, ist also das Verhältniß der Reibung zum Drucke oder die Größe der Reibung bei einer der Gewichtseinheit gleichen Pressung. Mit diesem Zahlenverhältnisse hat man den nach den Regeln der Mechanik ausgemittelten Druck auf die Berührungsflächen zu multipliciren, um den Reibungswiderstand zu erfahren, welchen derselbe verursacht.

Wir sahen auch, daß wenn ein schwerer Körper auf der schiefen Ebene (Fig. 167) herabgleiten soll, die Componente $p = \frac{BC}{AB} . P$ dem Widerstande der Reibung gleich sein muß. Jetzt wissen wir, daß die Größe der Reibung dem Producte aus dem Normaldrucke $GM = N$ und dem constanten Factor f gleich ist; es muß daher, da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GG_1M und ABC

$$N : P = AC : AB \text{ oder } N = \frac{AC}{AB} . P \text{ ist,}$$

die Größe der Reibung

$$f . \frac{AC}{AB} . P \text{ und}$$

$$\frac{BC}{AB} . P = f . \frac{AC}{AB} . P \text{ oder } f = \frac{BC}{AC} \text{ sein.}$$

Das Verhältniß der Höhe zur Basis einer schiefen Ebene ist also dem Reibungscoefficienten gleich, wenn die

Neigung derselben gerade so groß ist, daß der Körper herabzugleiten anfängt. Man nennt deshalb den hierdurch bedingten Winkel den Reibungswinkel.

I. Tafel der Verhältnisse der Reibung zum Drucke, für ebene Flächen, welche längere Zeit in Berührung standen.

Reibende Körper.		Zustand der Berührungsflächen.							
		trocken.	mit Wasser.	mit Olivenöl.	m. Schweinefett.	mit Talg.	mit trockner Seife.	polirt u. eingeölt.	eingeölt und mit Wasser.
Holz auf Holz	kleinster	0,30	0,65	.	.	0,14	0,22	0,30	
	mittler	0,50	0,68	.	0,21	0,19	0,36	0,30	
	größter Werth	0,70	0,71	.	.	0,25	0,44	0,40	
Holz auf Metall	. .	0,60	0,65	0,10	0,12	0,12	.	0,10	
Hanf in Seilen, Zöpfen u. Gurten auf Holz	kleinster	0,50							
	mittler	0,63	0,87						
	größter Werth	0,80							
Sohlenleder auf Holz oder Gußeisen.	hochkantig	0,43	0,62	0,12	.	.	.	.	0,27
	flach	0,62	0,80	0,13					
Lederriemen auf einer Trommel von	Holz	0,47							
	Metall	0,54	.	.	.	.	.	0,28	0,38
Metall auf Metall	kleinster	0,15	.	0,11	.	.	.		
	mittler	0,18	.	0,12	0,10	0,11		0,12	
	größter Werth	0,24	.	0,16	.	.	.	0,17	

Rogenstein auf Rogenstein	ohne Schmiere	0,74
Muschelkalk » »	» »	0,75
Backstein » »	» »	0,67
Eiche (Hirnholz) »	» »	0,63
Schmiedeeisen »	» »	0,49
Muschelkalk auf Muschelkalk	» »	0,70
Backstein » »	» »	0,67
Schmiedeeisen auf Muschelkalk	» »	0,42
Eiche (Hirnholz) »	» »	0,64
Rogenstein auf Rogenstein	mit Mörtel aus 3 Th. Sand und 1 Th. hydr. Kalk	0,74

II. Tafel der Verhältnisse der Reibung zum Drucke, für ebene Flächen, welche sich auf einander bewegen.

Reibende Körper.		Zustand der Berührungsflächen.									
		trocken.	mit Wasser.	mit Olivenöl.	m. Schweinefett.	mit Talg.	m. Schweinefett und Wasserblei.	mit Wagenschmiere.	mit trockner Seife.	nur fettig.
Holz auf Holz	kleinster	0,20	.	.	0,06	0,06	.	.	0,14	0,08
	mittler	0,36	0,25	.	0,07	0,07	.	.	0,14	0,12
	größter Werth	0,48	.	.	0,07	0,08	.	.	0,16	0,15
Holz auf Metall.	kleinster	0,20	.	0,05	0,07	0,06	.	.	.	0,10
	mittler	0,42	0,24	0,06	0,07	0,08	0,08	0,10	0,20	0,14
	größter Werth	0,62	.	0,08	0,08	0,10	.	.	.	0,16
Hanf in Seilen, Zöpfen u. Gurten auf	Eiche	0,45	0,33							
	Gußeisen.	.	.	0,15	.	0,19				
Starkes Leder, flach auf Holz od. Metall	roh	0,54	0,36	0,16	.	0,20				
	geschlagen	0,30	.							
	fettig	.	0,25							
Starkes Leder, hochkantig, (Kolbenliederung auf Holz od. Metall	trocken	0,34	0,31	0,14	.	0,14				
	fettig	.	0,24							
Metall auf Metall	kleinster	0,15	.	0,06	0,07	0,07	0,06	0,12	.	0,11
	mittler	0,18	0,31	0,07	0,09	0,09	0,08	0,15	0,20	0,13
	größter Werth	0,24	.	0,08	0,11	0,11	0,09	0,17	.	0,17

Rogenst. auf Rogenst.	ohne	Schmiere	0,64
Muschelkalk » »	»	»	0,67
Backstein » » »	»	»	0,65
Eiche (Hirnholz) »	»	»	0,38
Schmiedeeisen »	»	»	0,38
Muschelkalk auf Muschelkalk	»	»	0,69
Rogenst. » » »	»	»	0,65
Backstein » » »	»	»	0,60
Eiche (Hirnholz »	»	»	0,38
Schmiedeeisen »	»	»	0,24
Desgleichen »	naß		0,30

103. Reibung auf der Horizontalebene. — Ein Körper, welcher gegen die Ebene, auf der er ruht, einen Normaldruck N ausübt, erfordert zur Ueberwindung der Reibung eine Kraft $F = f.N$, wenn dieselbe mit der Neigungslinie der Ebene parallel ist. Wenn daher die Ebene und ebenso die Kraft horizontal ist, so wird der Druck N dem Gewichte P des Körpers gleich und

$$F = f.P.$$

Eine Kraft $F = aB$ aber, welche in einer der Horizontalebene nicht parallelen Richtung aF (Fig. 171) wirkt, läßt sich in zwei Componenten aC und $aD = BC$ zerlegen, von welchen die erste eine Bewegung hervorzubringen, die andere den Körper zu heben strebt und den Druck desselben gegen die Ebene vermindert. Der übrig bleibende Druck ist daher $P - BC$ und $f(P - BC)$ die durch ihn verursachte Reibung, welche für den Gleichgewichtszustand der Componente aC gleich sein muß. Es ist demnach

$$aC = f(P - BC) \text{ oder } aC + f.BC = f.P,$$

oder da die Neigung der Kraft F gegen die Ebene durch die Seiten ac, bc eines Dreiecks gegeben sein kann, dessen Hypotenuse ab der Längeneinheit gleich ist, und da alsdann

$$aC : F = ac : 1 \text{ und } BC : F = bc : 1 \text{ ist,}$$

$$F.ac + f.F.bc = f.P$$

$$F(ac + f.bc) = f.P \text{ und}$$

$$F = \frac{fP}{ac + f.bc}$$

Je kleiner $ac + f.bc$ ist, desto größer muß die Kraft F zur Ueberwindung der Reibung sein und umgekehrt, und da der Zähler $f.P$ von der Richtung der Kraft unabhängig ist, so wird für den größten Werth, welchen der Nenner $ac + f.bc$ annehmen kann, die Reibung F geringer sein, als für jeden anderen Werth desselben. Um aber dasjenige Verhältniß der Seiten ac und bc zu finden, bei welchem $ac + f.bc$ ein Maximum ist, mögen die Projectionen ac und bc der Linie $ab = 1$ (Fig. 172)

ebenso die Richtung der Kraft F bestimmen, wie in der vorhergehenden Figur. Bildet man nun ein zweites, dem Dreiecke abc ähnliches Dreieck adg, dessen Hypotenuse sich zu der des erstern verhält, wie der Reibungscoefficient zur Einheit, d. h. macht man $ad : ab = f : 1$ oder $ad = f . ab$, so wird auch $dg : bc = f : 1$ oder $dg = f . bc$ sein. Indem man ferner im Puncte a eine Normale zu ab zieht, $ad_1 = ad$ nimmt und die Senkrechte d_1g_1 zieht, wird diese normal zu ag und das Dreieck ad_1g_1 congruent dem Dreiecke dag, folglich auch $ag_1 = dg$. Nun war aber $dg = f . bc$, so daß auch $ag_1 = f . bc$ und $d_1g_1 = f . ac$ ist und der Nenner $ac + f . bc$ auch durch die Linie $cg_1 = ac + ag_1$ ausgedrückt werden kann. Insofern nun die Linie cg_1, welche nichts anderes ist, als die Horizontalprojection von bd_1, am größten wird, wenn die Vertikalprojection bc_1 von bd_1 Null ist, müssen für ein Maximum der Linie cg_1 oder des Nenners $ac + f . bc$ die Abstände d_1g_1 und bc einander gleich sein. Dies giebt, da $d_1g_1 = f . ac$ ist, $f . ac = bc$ oder $f = \frac{bc}{ac}$, woraus folgt,

daß die Kraft am vortheilhaftesten wirkt, wenn sie gegen die Horizontalebene eine solche Neigung hat, daß das Verhältniß der Höhe bc zur Basis ac dem der Reibung zum Drucke, d. i. dem Reibungscoefficienten der sich reibenden Substanzen gleich ist. Da nach dem Früheren für diejenige Neigung einer schiefen Ebene, bei welcher ein Körper von selbst herabzugleiten anfängt, ebenfalls das Verhältniß der Höhe zur Basis dem Reibungscoefficienten gleich sein muß, so sieht man hieraus, daß die vortheilhafteste Neigung der Kraft gegen die Ebene dem sogenannten Reibungswinkel entspricht.

Die Bedingungen für die vortheilhafteste Richtung der Zugkraft bei Fuhrwerken, d. i. für die zweckmäßigste Neigung der Stränge, lassen sich durch ähnliche Betrachtungen finden.

104. Reibung auf der schiefen Ebene. — Wenn sich ein Körper vom Gewichte P auf der geneigten Ebene **AB** (Fig. **167**) befindet und von einer ihr parallelen und aufwärts gerichteten Kraft **F** ergriffen wird, so ist nach §. 94 d. II. Abth. für den Gleichgewichtszustand

$$p : P : N = BC : AB : AC,$$

folglich die Kraft, welche den Körper auf der schiefen Ebene zu erhalten vermag

$$p = \frac{BC}{AB} . P$$

und der Normaldruck

$$N = \frac{AC}{AB} . P.$$

Die Reibung, welche letzterer verursacht, ist $f . N$ und da dieselbe die Bewegung zu verhindern strebt und von der Kraft F mit überwunden werden muß, so wird für das Gleichgewicht

$$F = p + f . N$$

$$= \frac{BC}{AB} . P + f . \frac{AC}{AB} . P = \left(\frac{BC}{AB} + f . \frac{AC}{AB}\right) P,$$

oder wenn man die Seiten **BC** und **AC**, welche die Neigung der Ebene bestimmen, auf die Einheit bezieht, d. h. $AB = 1$ setzt,

$$F = (BC + f . AC)\ P$$

Um den Körper blos am Herabgleiten zu hindern, kommt die Reibung, und für eine abwärts gerichtete Kraft die Componente $BC . P$ der Kraft **F** zu statten; es ist daher im ersten Falle $F + f . AC . P = BC . P$, im anderen $F + BC . P = f . AC . P$.

Hat aber die Kraft F eine beliebige Richtung (Fig. **173**) und ist ihre Neigung gegen die Ebene wieder durch die Seiten **ac** und **bc** eines Dreiecks von der Hypotenuse $ab = 1$ gegeben, so erhält man durch Zerlegung der Kraft F parallel und normal zur Ebene die Componenten $ac . F$ und $bc . F$. Die letztre hebt einen Theil des Normaldrucks auf, ver-

mindert die Reibung um eine Größe f . bc . F und tritt somit auf die Seite der Kraft ac . F, so daß

$$ac . F + f . bc . F = F (ac + f . bc) = (BC + f . AC) P,$$

und

$$F = \frac{BC + f . AC}{ac + f . bc} . P$$

ist. Da der Zähler des Bruches für eine gegebene Neigung der Ebene constant ist, und der Bruch selbst seinen kleinsten Werth annimmt, wenn der Nenner $ac + f . bc$ ein Maximum ist, so wird auch wieder $\frac{bc}{ac} = f$, d. h. die Kraft unter dem Reibungswinkel gegen die Ebene geneigt sein müssen, für die zweckmäßigste Richtung der Kraft. In dem Falle, wo der Körper blos am Herabgleiten verhindert werden soll, tritt f . AC . P auf die Seite der Kraft, ac . F, dagegen f . bc . F auf die des Widerstandes, und es wird

$$ac . F + f . AC . P = BC . P + f . bc . F \text{ und}$$

$$F = \frac{BC - f . AC}{ac - f . bc} . P$$

Für die horizontale Richtung der Kraft F (Fig. 174) vermehrt die Componente bc . F den Normaldruck, mithin die Reibung oder den Widerstand gegen die Bewegung um f . bc . F; es wird daher

$$ac . F = (BC + f . AC) P + f . bc . F \text{ und}$$

$$F = \frac{BC + f . AC}{ac - f . bc} . P;$$

und da für diesen Fall $ac : bc : ab = BC : AC : AB$, übrigens aber ab sowohl als AB der Einheit gleich ist, so kann ac mit BC und bc mit AC verwechselt, und

$$F = \frac{BC + f . AC}{AC - f . BC} . P$$

gesetzt werden. Die Differenz $AC - f . BC$ kann, wenn f nicht außerordentlich klein ist, schon bei nicht sehr starken Neigungen der Ebene sehr klein werden; dies zeigt, daß die zur Bewegung nöthige Kraft leicht das Vielfache von der-

jenigen werden kann, welche ohne den Reibungswiderstand genügen würde.

Ein Körper, welcher auf einer krummen Fläche liegt, berührt diese nur in einem schmalen Flächenelemente. Es wird daher dasselbe sein, als ob der Körper auf einer Tangentialebene zu diesem Flächenelemente ruhte, und die Bedingungen des Gleichgewichts auf der krummen Fläche werden für jedes Element derselben die nämlichen sein, wie für eine geneigte Ebene, welche mit dem Flächenelemente gleiche Neigung gegen den Horizont hat.

105. Arbeitsgröße auf der schiefen Ebene. — Die geneigte Ebene ist eine der vorzüglichsten einfachen Maschinen, welche besonders Anwendung findet, wenn es sich um die Hebung sehr großer Lasten auf eine beträchtliche Höhe handelt. Um nämlich eine Last **P** von einem Puncte in der Ebene **AC** (Fig. 175) weg in das Niveau des Punctes **B** zu bringen, zieht man es häufig vor, dieselbe statt unmittelbar durch die senkrechte Höhe **BC**, auf der geneigten Ebene **AB** emporzuheben. Könnte man alle Reibung vermeiden, so würde im ersten Falle die Kraft der Last **P** in jedem Augenblicke gleich, im andern Falle nur $F = \frac{BC}{AB} . P$, möglicherweise also ein sehr kleiner Theil der Last **P** sein. Die Arbeitsgröße für die senkrechte Erhebung würde, da der Weg der Kraft **BC** ist, **BC . P** sein, für die Erhebung auf der schiefen Ebene, auf welcher der Weg der Kraft **AB** ist, $F . AB = AB . \frac{BC}{AB} . P = BC . P$. Die Arbeitsgröße bleibt demnach dieselbe, ob man die Last senkrecht oder mit Hülfe der schiefen Ebene emporhebt und es kann daher durch die schiefe Ebene nicht mechanische Arbeit erspart, sondern blos der Widerstand der Last so angeordnet werden, daß er der zu Gebote stehenden Kraft entspricht.

106. Spannung eines Seiles, welches auf der Oberfläche eines Körpers ausgespannt ist. —

Nachdem wir die Bedingungen kennen gelernt haben, unter welchen sich gegen einander stützende Körper im Gleichgewichte sind, können wir auch die Spannung eines Seiles (Fig. 176) finden, an welchem einerseits der Widerstand **P**, andererseits die Kraft **T** wirkt, und welches über eine beliebige krumme Oberfläche **AE** gespannt ist. Theilen wir den Umwickelungsbogen **AE** Fig. 177 in Elemente, klein genug, um jedes Curvenelement als einen kleinen Kreisbogen ansehen und mit seiner Sehne verwechseln zu können, und bezeichnen wir die Mittelpuncte der Bogenelemente mit **O**, $\mathbf{O_1}$ $\mathbf{O_2}$.., nehmen wir ferner an, daß das Seil ebenfalls aus kleinen Theilen zusammengesetzt sei, welche die krumme Oberfläche in den Puncten **A**, **B**, **C**... berühren, so wird das Seil auf derselben im Gleichgewichte sein, wenn jeder der Puncte **a**, **d**, **c**, . . ., in welchen, wie wir annehmen, das Seil aus einer Richtung in eine andere übergeht, für sich im Gleichgewichte ist. Wenn wir das Gewicht einer Längeneinheit des Seils mit **p** bezeichnen, von der Reibung absehen und zunächst das Element **AB** und den Punct **a** betrachten, so erkennen wir, daß in diesem Puncte vier Kräfte wirksam gedacht werden können, die Spannung **t** in der Richtung **at**, die Spannung **P** in der Richtung **aP**, die Rückwirkung **aW** normal gegen das Element oder die Sehne **AB** und das Gewicht **AB**.**p** des Seilstücks **AB**. Nimmt man **aP** proportional dem Widerstande **P**, **aG** proportional dem Gewichte **AB**.**p** und zerlegt diese beiden Kräfte normal und tangential zur Oberfläche, so erhält man aus der ersteren die Componenten **aR** und **aQ**, aus der letztern die Componenten **aS** und **aV**. Während nun **aQ** und **aV** von dem Widerstande des Körpers aufgenommen werden, bleiben nächst der Spannung **t** nur noch die derselben entgegengesetzt gerichteten Kräfte $\mathbf{aR = PQ}$ und $\mathbf{aS = GV}$ übrig, und da diese für den Zustand des Gleichgewichts der Spannung **t** gleich sein müssen, so folgt

$$\mathbf{t = aR + aS = PQ + GV.}$$

In den Dreiecken **aPQ** und **AOB** ist je eine Seite

des einen auf einer Seite des andern normal d. h. das Dreieck aPQ ist dem Dreiecke AOB ähnlich und wie dieses gleichschenkelig. Es folgt daraus, daß $PQ = aP$ d. h, daß die Componente PQ oder aR der Spannung P gleich ist. Wenn man ferner die Vertikale A_2B und die Horizontale AA_2 zieht, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck AA_2B, welches, da die Winkel bei G und B gleich sind, dem ebenfalls rechtwinkeligen Dreiecke aVG ähnlich ist. Man erhält hierdurch $GV : aG = A_2B : AB$ oder $GV : AB . p = A_2B : AB$, und weil $A_2B = A_1B_1$ ist,

$$GV = A_1B_1 . p.$$

Die Spannung im Puncte B ist daher

$$t = P + A_1B_1 \cdot p$$

d. h. der Summe zweier Kräfte gleich, von welchen die eine die Spannung im vorhergehenden Puncte A, die andere das Gewicht eines Seilstücks ist, dessen Länge der Vertikalprojection des Elementes AB entspricht. Für die Spannung t_1 im Puncte C wird man daher

$$t_1 = t + B_1C_1 . p = P + A_1B_1 . p + B_1C_1 . p = P + A_1C_1 \cdot p$$

und für die im höchsten Puncte D, $P + A_1D . p$ erhalten. Das Seilstück DE und die Kraft T auf der andern Seite von D giebt auf die nämliche Weise für die Spannung im höchsten Puncte $T + DE_1 . p$, woraus für den Zustand des Gleichgewichts

$$T + DE_1 . p = P + A_1D . p,$$

und die Kraft, welche dem Widerstande P und der durch das Seilgewicht verursachten Spannung das Gleichgewicht zu halten vermag,

$$T = P + (A_1D - DE_1) p = P + A_1E_1 . p.$$

Wird das Gewicht des Seils vernachlässigt d. h. $p = o$ gesetzt, so erhält man $t = t_1 = T = P$, und die Spannung ist an allen Stellen dem Widerstande P gleich, welches auch die Gestalt der krummen Oberfläche sein mag. Fragt man

dagegen nach der Spannung, welche ohne den Widerstand P blos vermöge des Seilgewichts in E statt finden würde, so wird für $P = o$

$$T = A_1 E_1 . p,$$

und man sieht, daß, um das Seil über die krumme Oberfläche zu ziehen, am anderen Seilende eine dem Gewichte eines Seilstücks, dessen Länge der Vertikalabstand der beiden Seilenden ist, gleiche Kraft nöthig ist und daß das Seilgewicht immer eine nach der Seite des tiefsten Seilendes hin gerichtete Spannung verursacht. Nur wenn die beiden Endpuncte A und E sich in gleicher Höhe befinden, ist dieselbe Null.

107. Reibung eines Seiles, welches über eine feste Walze gleitet. — Bei einer festen cylindrischen Walze vom Halbmesser R, (Fig. 178) über welche ein mit dem Gewichte P belastetes Seil geschlungen ist, und wenn wir von dem eigenen Gewichte des Seiles absehen, hat die Kraft T nicht allein das Gewicht P, sondern auch die Reibung zu überwinden, welche der Druck des Seiles gegen die Oberfläche des Cylinders erzeugt. Nimmt man an, daß die Elemente des Seils den Cylindermantel in den Puncten A, B, C... berühren und theilt man den Umwickelungsbogen AF in gleiche und sehr kleine Theile, so daß für jeden der kleinen Bögen AB, BC, CD... seine Sehne s gesetzt werden kann, so würde ohne die Reibung die Spannung t im Puncte B der Spannung P im Puncte A gleich sein. Wir können daher die beiden gleichen Tangenten aA und aB, welche in die Richtungen dieser Spannungen fallen, als die Repräsentanten derselben betrachten, so daß die Diagonale aQ des Parallelogrammes AaBQ den Normaldruck gegen das Element AB vorstellt und f.aQ die Vermehrung der Spannung t durch die Reibung, d. h.

$$t = P + f.aQ$$

ist. Da die Seiten des Dreiecks aAQ rechtwinkelig zu den Seiten des Dreiecks AOB sind, so ist

$aQ : aA = AB : AO$ oder $aQ : P = s : R$,

folglich $aQ = P \cdot \frac{s}{R}$ und

$$t = P + f \cdot P \frac{s}{R} = P\left(1 + \frac{fs}{R}\right)$$

Da fs und R auch für das nächste Element dieselben Werthe behalten und nur P in t übergeht, so wird die Spannung in C

$$t_1 = t\left(1 + \frac{fs}{R}\right) = P\left(1 + \frac{fs}{R}\right)\left(1 + f\frac{s}{R}\right)$$

$$= P\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^2,$$

und wenn überhaupt n Elemente vorhanden sind, für das letzte

$$T = P\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^n \quad *)$$

---

*) Bedenkt man, daß, je größer bei einem gegebenen Umwickelungsbogen die Zahl der Elemente, je kleiner also $\frac{s}{R}$ genommen wird, der bei der obigen Betrachtung angenommene Fall, wo das Seil die Walze nur in einzelnen Puncten berührt, der Wirklichkeit um so näher kommt, so sieht man, daß $\frac{s}{R}$ also auch $\frac{fs}{R}$ durchaus ein sehr kleiner Werth sein muß. Setzt man daher n so groß, daß $\frac{fs}{R}$ sehr klein, oder wenn m eine sehr große Zahl ist, $\frac{fs}{R} = \frac{1}{m}$ ist, und bezeichnet man übrigens den ganzen bewickelten Bogen mit S, so daß $ns = S$ und $s = \frac{S}{n}$ wird, so folgt $f\frac{S}{nR} = \frac{1}{m}$, $n = \frac{mfS}{R}$ und

$$T = P\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{mfs}{R}} = P\left\{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right\}^{\frac{fs}{R}}$$

Je mehr Elemente vom Seile umschlungen sind, je größer also der Umwickelungsbogen, um so größer wird $\left(1+\frac{fs}{R}\right)^n$, da $1+\frac{fs}{R}$ stets größer als die Einheit ist, und man sieht, daß die Spannung T bei gleichem Widerstande P sehr schnell zunimmt, wenn der umschlungene Bogen größer wird. Verhalten sich z. B. die Umwickelungsbögen wie 1:2:3..., so werden die Spannungen in dem Verhältnisse

$$\left(1+\frac{fs}{R}\right)^n : \left(1+\frac{fs}{R}\right)^{2n} : \left(1+\frac{fs}{R}\right)^{3n} \ldots \text{ oder}$$

$$1 : \left(1+\frac{fs}{R}\right) : \left(1+\frac{fs}{R}\right)^2 \ldots.$$

Wird das Binomium $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ aufgelöst, so erhält man

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m.\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \ldots,$$

und da m jedenfalls so groß ist, daß m—1, m—2, m—3.... von m so gut wie nicht verschieden sind,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\ldots.$$

Addirt man eine gehörige Anzahl Glieder dieser Reihe, so erhält man die Zahl 2,71828..., welche die Basis der natürlichen Logarithmen genannt und gewöhnlich mit e bezeichnet wird. Man kann daher

$$P.(2{,}718\ldots)^{\frac{fs}{R}} = P.e^{\frac{fs}{R}}$$

setzen. Auch wenn man für m eine sehr große Zahl nimmt und $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ mit Hülfe der Logarithmen berechnet, erhält man annähernd dieselbe Zahl. Für $m = 8000$ z. B. wird

stehen, d. h. die Spannungen verhalten sich wie die Glieder einer geometrischen Reihe, wenn die Umwickelungsbögen sich wie die natürlichen Zahlen verhalten. Nehmen wir behufs eines Beispiels an, daß ein Seil um eine hölzerne Walze vom Halbmesser $R = 0,^{m}1 = 100^{mm}$ geschlungen sei und daß das Verhältniß der Reibung zum Drucke $\frac{1}{3}$ betrage, so wird für eine Umwickelung der bewickelte Bogen $2.100.\pi = 628^{mm}$, und wenn man $s = 1^{mm}$ nimmt, die Zahl der Elemente $n = 628$, folglich

$$T = P\left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{100}\right)^{628} = 8,085\ P.$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = \left(1 + \frac{1}{8000}\right)^{8000} = 2,718\ldots$$

Berechnet man die obigen Beispiele nach der strengeren Formel $T = P\,(2,718\ldots)^{\frac{fs}{R}}$, so erhält man für eine Umwickelung $T = 8,121\ P$, für zwei Umwickelungen $T = 65,944\ P$ und für drei $T = 535,481\ P$.

Man sieht aus der Gleichung $T = P\,.\,e^{\frac{fs}{R}}$ zugleich, daß das Verhältniß der Kraft T zur Spannung P nicht sowohl von der absoluten Länge des umschlungenen Bogens, als vielmehr von dem Verhältnisse seiner Länge zum Radius, d. i. von dem Winkel abhängt, welchen die zu den Endpuncten des Umwickelungsbogens gehörigen Radien einschließen. Auf diese Weise erscheint der Ausdruck $T = P\,.\,e^{\frac{fs}{R}}$ gänzlich unabhängig von der Gestalt und den Dimensionen der bewickelten Oberfläche, und welcher Art die couvexe Curve auch sein mag, das Verhältniß von T und P ist genau so, als ob ein Kreisbogen umspannt würde, dessen Centriwinkel mit demjenigen gleich ist, welchen die Perpendikel zu den äußersten Curvenelementen einschließen.

Für zwei Umwickelungen wird n doppelt so groß und $T = (8{,}085)^2 P = 65{,}367\ P$ und für 3 Umwickelungen oder 3n Elemente $T = (8{,}085)^3\ P = 528{,}494\ P$.

Wenn aber, wie man sieht, die Reibung so beträchtlich werden kann, daß eine dem Vielfachen der Last gleiche Kraft an dem einen Seilende erforderlich ist, um das Seil über den Cylinder zu ziehen, so wird umgekehrt ein in demselben Verhältnisse kleinerer Widerstand am andern Seilende genügen, um die an jenem wirkende Kraft aufzuheben. Eine Kraft $T = \frac{1}{5\frac{1}{2}8{,}5} P$ wird daher hinreichen, um die Last P am Herabsinken zu hindern oder mit gleichförmiger Bewegung herabsinken zu lassen, wenn das Seil unter den oben angenommenen Verhältnissen drei Umwickelungen macht. Dies erklärt, warum ein Ankertau im Stande ist, ein Schiff festzuhalten, obschon es nur durch einige Umwickelungen um eine feste Walze auf dem Schiffe mit demselben verbunden ist. Auch Küfer und Brauer machen von der bedeutenden Reibung eines so aufgewickelten Seiles Gebrauch, um schwere auf Schleifen befestigte Fässer auf den Kellerstufen gleichförmig herabgleiten zu lassen. Indem sie das an dem Fasse befestigte Seil mit seinen beiden Enden auf zwei vor der Kellerthüre aufgerichtete Säulen wickeln und nur langsam nachlassen, sind sie bei um so geringerer Anstrengung im Stande, das Faß allmählig herabzulassen, je größer die Anzahl der Seilumwickelungen ist.

Wenn man in einem Knoten (Fig. 179), welcher die Enden zweier Seile verknüpft, den Lauf jedes Seilstücks verfolgt, so sieht man, daß jedes Seilende sich um seine eigene Fortsetzung und um das andere Seilende wie um eine Walze schlingt und daß überdies beide Enden von diesen Umschlingungen festgehalten und zusammengedrückt werden. Würde daher schon wegen dieser Umwickelungen allein ein im Verhältnisse zu den Kräften T und T, nur geringer Widerstand genügen, um das Gleiten der Seile zu verhüten, so darf der Druck, mit welchem die Seilenden von den Umwickelungen festgehalten werden und welcher mit den Intensitäten der

Kräfte T und T, wächst, nur eine jenen Widerstand überwiegende Reibung verursachen, um diesen Kräften, so groß sie auch sein mögen, das Aufziehen des Knotens unmöglich zu machen.

108. Gleichgewicht und Theorie des Keils. — Jeder Körper von der Gestalt eines dreiseitigen Prisma's Fig. 180, welcher bestimmt ist, mit einer scharfen Kante CC_1 zwischen zwei Körper oder zwischen die Theile eines und desselben Körpers einzudringen, um sie zu trennen oder zu spalten, wird ein Keil genannt. Die Kante CC_1, welche vorausgeht, und in der Regel dem spitzigsten Winkel des Querschnitts ACB entspricht, heißt die Schärfe, die ihr gegenüberliegende Fläche, ABB_1A_1 gegen welche die Kraft wirkt, der Kopf oder Rücken, und die Seitenflächen AA_1C_1C und BB_1C_1C heißen die Seiten des Keils. Das Gewicht des Keils wollen wir, da es den auf ihn wirkenden Kräften gegenüber sehr gering ist, vernachlässigen, und die Kraft, welche das Eindringen des Keils bewirkt, immer normal gegen den Kopf gerichtet voraussetzen, weil sie außerdem eine der Wirkung des Keils nachtheilige Drehung desselben um sich selbst hervorbringen würde, welche man in der Ausübung natürlich vermeidet.

Insofern der Keil nichts anderes ist, als ein Körper, welcher sich gegen zwei Flächen zugleich stützt, wird derselbe im Gleichgewichte sein, wenn die auf ihn wirkenden Kräfte mit den Widerständen dieser Flächen Gleichgewicht bilden. Die Kraft, mit welcher ein Körper dem Eindringen eines Keils widersteht, äußert sich in zwei, auf die Seiten des Keils normalen, Rückwirkungen in den Berührungspuncten a und b (Fig. 181) und der Mittelkraft derselben muß für den Zustand des Gleichgewichts die Kraft F nicht nur gleich, sondern auch entgegengesetzt gerichtet sein und durch den Durchschnittspunct O derselben gehen, wenn nicht eine dem beabsichtigten Zwecke hinderliche Drehung entstehen soll. Stellen demnach Op und Oq die blos ihren Richtungen nach bekann-

ten Widerstände vor und construirt man das Parallelogramm Opnq, so wird die Resultante On derselben mit der Intensität der Kraft F übereinstimmen müssen. Das Dreieck npO ist dem Dreiecke ACB ähnlich, weil die Seiten des einen normal auf den Seiten des andern sind; es ist daher On : Op : pn = AB : BC : AC, oder wenn man die Widerstände in a und b mit Q und R bezeichnet,

$$F : R : Q = AB : BC : AC,$$

d. h. es verhalten sich für das Gleichgewicht des Keils die normal gegen die drei Seitenflächen wirkenden Kräfte, wie diese Seiten selbst.

Für einen Keil (Fig. 182), dessen Querschnittsgestalt ein rechtwinkeliges Dreieck ist und bei welchem die Berührungspuncte in einer zum Rücken parallelen Linie liegen, fällt der Durchschnittspunct der Rückwirkungen in die Hypotenuse bc selbst und zwar in den nämlichen Punct, in welchem der Angriffspunct des zu demselben normalen Widerstandes gedacht werden muß. Es wird daher auch die Kraft F die Richtung Fb haben müssen, und die obige Proportion geht in die nämliche über, welche wir für die schiefe Ebene fanden, wenn Q das Gewicht des auf derselben ruhenden Körpers, F eine der Basis parallele Kraft, R den Widerstand der schiefen Ebene bezeichnete. Weit häufiger kommt es vor, daß der Querschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck Fig. 183 ist, und da für diesen Fall $BC = AC$ ist, so muß

$$F : R : Q = AB : AC : AC \text{ und}$$

$$Q = R = \frac{F \cdot AC}{AB}$$

sein.

Die Widerstände in den Puncten a und b sind also einander gleich. Der Keil ist übrigens unter sonst gleichen Umständen um so wirksamer, je größer das Verhältniß der Seiten zum Rücken, d. i. je spitziger oder schärfer derselbe ist, und deshalb bedient man sich auch zum Spalten der Körper vorzugsweise sehr scharfer Keile.

109. Einfluß der Reibung auf die Wirkung des Keils. — Nicht blos die in dem Vorstehenden gefundenen Widerstände sind es, welche die auf den Keil wirkende Kraft zu überwinden hat, sondern es kommt hierzu in der Wirklichkeit auch noch die Reibung an den Seiten des Keils und den Flächen, zwischen welche er eingeschoben wird. Da diese Reibung proportional den Druckkräften **Q** und **R** ist, so muß natürlich die Reibung sehr beträchtlich werden, wenn diese vermöge des Verhältnisses der Dimensionen, der Seiten und des Rückens sehr groß ist. So nachtheilig dies aber scheinen mag, so ist es doch gerade wieder die Reibung, welche, wie wir weiter unten sehen werden, den Keil zu einer für viele Zwecke äußerst brauchbaren Maschine macht.

Die Größen der Reibungswiderstände an beiden Seiten des Keils sind **fR** und **fQ**, und da sie in den Richtungen **AC** und **BC** wirken, ist die Spitze **C** als ihr gemeinschaftlicher Angriffspunkt zu betrachten. Bei dem gleichschenkeligen Keile, bei welchem $Q = R$ und $fQ = fR$ ist, liegt die Resultante dieser Widerstände in der Linie **CD** (Fig. 184), welche die Spitze **C** mit der Mitte **D** des Rückens verbindet und läßt sich durch die Diagonale Cc_1 des Parallelogramms $Cb_1c_1a_1$ ausdrücken, dessen Seiten gleich und den Reibungswiderständen proportional sind. Liegen daher die Stützpuncte **a** und **b** in einer zum Rücken **AB** parallelen Linie, so fällt Cc_1 in die Richtung der Resultante $On = Q \cdot \frac{AB}{AC}$ der Widerstände **Q** und **R**, und es muß für das Gleichgewicht

$$F = On + Cc_1$$

sein. Indem sich die Diagonalen des gleichseitigen Parallelogramms Cb_1c_1a, gegenseitig halbiren und die Dreiecke **ACD** und a_1 **CI** ähnliche sind, erhält man

$$CI : a_1C = CD : AC \text{ oder } \frac{Cc_1}{2} : fQ = CD : AC \text{ und}$$

$$Cc_1 = 2f.Q\frac{CD}{AC}, \text{ folglich}$$

$$F = Q.\frac{AB}{AC} + 2f.Q\frac{CD}{AC}$$

Um zu sehen, wie groß der Einfluß der Reibung ist, wollen wir das Verhältniß $\frac{AB}{AC}$, so wie das der Reibung zum Drucke $\frac{1}{10}$ setzen, und da CD von AC nicht sehr verschieden ist, $\frac{CD}{AC} = 1$ annehmen. Wir erhalten dann $F = Q.\frac{1}{10} + 2.\frac{1}{10}.Q = \frac{3}{10}Q$ mit Rücksicht auf die Reibung, und blos $F = \frac{1}{10}Q$ ohne die Reibung, so daß die Kraft wegen derselben auf das Dreifache derjenigen gesteigert werden muß, welche ohne die Reibung hinreichen würde, den Keil zu treiben.

Kommt es nur darauf an, den eingedrungenen Keil festzuhalten, damit er nicht durch die Resultante der Widerstände Q und R zurückgetrieben wird, so kommt die Reibung dieser Kraft zu statten und es wird für den gleichschenkeligen Keil.

$$F + 2f.Q\frac{CD}{AC} = Q.\frac{AB}{AC}$$

Das Eintreiben des Keils geschieht aber selten durch continuirlichen Druck, sondern fast immer durch wiederholte Schläge auf seinen Rücken, so daß in den Zwischenzeiten die Kraft F der Null gleich ist. Hieraus folgt, daß

$$2f.Q\frac{CD}{AC} = Q.\frac{AB}{AC} \text{ und } 2f.CD \text{ größer}$$

oder gleich AB sein muß, wenn der Keil, nachdem die Kraft F aufgehört hat, zu wirken, am Zurückspringen gehindert werden soll. Für obiges Beispiel wird daher das Verhältniß $\frac{AB}{CD}$ des Kopfes zur Höhe des Keils nicht größer als $2.\frac{1}{10} = \frac{1}{5}$ sein dürfen, damit der Keil nicht wieder zurückgeht.

110. Anwendung des Keils zur Keilpresse. — Eine der bemerkenswerthesten Anwendungen findet der Keil bei der sogenannten Keilpresse. In ihrer einfachsten Gestalt besteht dieselbe in einem Keile **ABC** (Fig. 185), welcher zwischen zwei prismatische Blöcke eingetrieben wird, von welchen der eine afgh sich gegen ein festes Hinderniß stemmt, während der andere bikl die Wirkung des Keils auf einen Körper **H** überträgt, welchen man zusammenzudrücken beabsichtigt. Die auf den Kopf des Keiles wirkende Kraft **F** hat daher den Widerstand des Körpers **H** gegen die Zusammendrückung und die Reibung an den Seiten **AC** und **BC** des Keils sowohl, als auch an der Unterlage **W** zu überwinden. Da der Block afgh nicht zurückweicht, so ist ah eine unveränderliche Linie, an welcher, da der Träger **W** das Stück bikl nicht nach unten weichen läßt, der Keil herabgleitet, so daß alle Puncte desselben mit ah parallele Wege beschreiben. Die Größe, um welche der Körper zusammengedrückt worden ist, wenn der Keil in die Lage $A_1B_1C_1$ gekommen ist, beträgt B_1B_2, der Weg, um welchen die Seiten des Keils fortgerückt sind $AA_1 = BB_2$ und der vom Kopfe selbst zurückgelegte Weg $DD_1 = BB_3$. Die Arbeitsgröße des Widerstandes **P**, welchen die Rückwirkung der gepreßten Substanz leistet, kann durch $P.BB_2$, die der Kraft F durch $F.BB_3$ ausgedrückt werden, und es würde ohne die Reibungswiderstände $F.BB_3 = P.B_1B_2$ sein müssen. Nun verursacht aber der Widerstand **P** durch seine gegen **BC** normale Componente **mQ** Reibung an der Seite **BC** des Keils und durch seine vertikale Componente $mS = PQ$ Reibung zwischen dem Blocke bikl und dem Träger **W**. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke **QmP** und **BCD** folgt

$$mQ : PQ : mP = BC : BD : CD,$$

oder da $mP = P$ und, wenn der Keil gleichschenkelig angenommen wird, $BD = \frac{AB}{2}$ ist,

$mQ : PQ : P = BC : \frac{AB}{2} : CD$, daher

$mQ = \frac{BC}{CD} . P$ und $PQ = \frac{AB}{2.CD} . P$, und die Größen der Reibungswiderstände f. $\frac{BC}{CD} . P$ und f. $\frac{AB}{2.CD} . P$.

Auf der Seite **AC** beträgt für den gleichschenkeligen Keil die Rückwirkung ebenfalls mQ, mithin ist auch hier die Reibung f. $\frac{BC}{CD} . P$. Die den Reibungswiderständen, um welche die Kraft F vermehrt werden muß, entsprechenden Arbeitsgrößen sind daher $2f . \frac{BC}{CD} . P . B_1B_2$ und $f . \frac{AB}{2CD} . P . B_1B_2$ und es muß

$$F . BB_3 = P . B_1B_2 + 2f \frac{BC}{CD} . P . BB_2 + f . \frac{AB}{2CD} . P . B_1B_2$$

sein. Die gleichschenkeligen Dreiecke BB_1B_2 und CAD geben aber vermöge ihrer Aehnlichkeit

$$BB_3 : BB_2 : B_1B_2 = CD : BC : AB \text{ und}$$

$$BB_3 = \frac{CD}{AB} . B_1B_1, \quad BB_2 = \frac{BC}{AB} . B_1B_2.$$

Durch Substitution dieser Werthe und wenn der Weg B_1B_2 des Widerstandes P mit e bezeichnet wird, erhält man daher die Arbeitsgröße der Kraft F

$$F . \frac{CD}{AB} . e = P . e + 2f . \frac{BC}{CD} . \frac{BC}{AB} . P . e + f . \frac{AB}{2.CD} . P . e.$$

Für sehr spitzige Keile, wie sie gewöhnlich angewendet werden, ist AB gegen CD sehr klein und BC von CD so wenig verschieden, daß es damit vertauscht und

$$F . \frac{CD}{AB} . e = P . e + 2f . \frac{CD}{AB} . P . e$$

gesetzt werden darf. Nehmen wir einen Keil an, bei welchem die Breite des Kopfs zur Höhe sich wie 1:20 verhält und setzen wir das Verhältniß der Reibung zum Druck $\frac{1}{10}$, so wird

$$20F.e = P.e + 2.\frac{2}{10}P.e = P.e + 4P.e,$$

und man sieht, daß die Reibung für sich viermal so viel Arbeit in Anspruch nimmt, als der Widerstand der gepreßten Substanz, daß aber eine Kraft $F = \frac{P.e + 4P.e}{20e} = \frac{P}{4}$ im Stande ist, den Keil vorwärts zu treiben. Wenn daher der Keil, wegen der beträchtlichen Arbeitsgröße, welche die Reibung erfordert, an sich eine sehr mangelhafte Maschine ist, so bietet er doch den Vortheil, daß mit geringer Kraft eine große Wirkung erzielt werden kann. Besonders brauchbar wird aber die Keilpresse dadurch, daß der Keil durch Stoß bewegt werden kann, ohne daß der Keil nach jedem Stoße zurückgeht, und daß dadurch der Stoß eines Körpers gegen den Keil gleichsam in einen andauernden sehr kräftigen Druck verwandelt werden kann, obschon bemerkt werden muß, daß der Stoß wiederum neue Arbeitsverluste herbeiführt.

Am häufigsten findet man die Keilpresse angewendet, um in den Oelmühlen den zerdrückten und in Haartuch eingeschlagenen Oelsaamen auszupressen. In die sogenannte Preßlade (Fig. 186), einen oben offenen parallelepipedischen Kasten oder Trog, werden an zwei gegenüberliegenden Wänden die Säcke mit Oelsaamenmehl zwischen vertikale und durchlöcherte gußeiserne Platten und über eine ebenfalls durchlöcherte Bodenplatte eingelegt. Zu beiden Seiten sind zwei keilförmige Futter a und b befindlich, auf welche der Preßkeil c und der Lösekeil d folgen, welche durch ein parallelepipedisches Stück e getrennt sind. Sowohl über dem Preß- als auch über dem Lösekeil befindet sich ein Stampfer, von welchen der eine bestimmt ist, durch wiederholtes Herabfallen den Keil c einzutreiben, der andere, nach beendigtem Pressen den Lösekeil, welcher mit seinem Kopfe nach unten ge-

kehrt ist, zurückzuschlagen und die Presse zu öffnen. Bei den älteren Constructionen liegen die Keile horizontal und werden durch Hämmer, ähnlich den Walkhämmern, eingetrieben.

111. Anwendung des Keils bei verschiedenen Werkzeugen. — Während der Keil in seiner einfachsten Gestalt zum Spalten des Holzes, zum Brechen der Steine, zu einer schnell lösbaren Verbindung von Maschinen- und anderen Bestandtheilen, zur Erzeugung eines kräftigen Druckes u. s. f. dient, erkennen wir ihn in dieser und in anderer Gestalt, z. B. als Pyramide oder Kegel an den Messern, Meiseln, Beilen, Drehstühlen, Nägeln, Pflöcken, Nadeln, und als den wirksamen Theil der Sägen, Feilen, Raspeln, Hobel u. s. w. wieder. Die Zähne einer Säge Fig. 187 sind als kleine Keile zu betrachten, welche bei jedem Schnitte auf eine gewisse Tiefe eindringen und durch die Bewegung in der Längenrichtung des Blattes das zwischen den Zähnen befindliche Material in kleinen Spähnen wegreißen. Erhalten die Zähne dadurch, daß sie geschränkt d. h. alternirend nach der einen und nach der andern Seite aus der Ebene des Blattes abgebogen sind, um das Klemmen der Säge zu verhindern, oder dadurch, daß die untern Flächen derselben abwechselnd von einer Fläche des Blattes zur andern schräg gefeilt wurden, im Zickzack liegende Schneiden, so wirken sie in der Richtung des Zuges ebenfalls als Keile. Feilen und Raspeln sind nichts, als durch den Hieb mit scharfen Grathen oder mit spitzigen Zähnchen bedeckte Prismenflächen, welche, gegen ein Arbeitsstück angedrückt, in die Oberfläche etwas eindringen und, darüber hingeführt, Feilspähne wegnehmen.

Wenngleich der Keil, je schärfer oder spitziger, desto wirksamer ist, so darf er doch bei verschiedenen Werkzeugen nur eine solche Zuschärfung erhalten, daß er die für das Material der Arbeitsstücke genügende Stärke behält. Im Allgemeinen darf er um so schärfer sein, je weicher und nachgiebiger die damit zu bearbeitende Substanz und je kleiner die da-

bei nöthige Kraft ist; bei Werkzeugen, welche blos durch Druck geführt werden, kann er schärfer sein, als bei solchen, welche durch Schläge eingetrieben werden. Ist die Substanz sehr hart, wie Eisen und Messing im kalten Zustande, so macht man den Winkel der Schneide etwa 90°, wie bei manchen Drehstählen und Grabsticheln. Bei den Holzhobeln giebt man dem Hobeleisen eine Schneide von etwa 30°; der Querart oder der Stoßart dagegen, welche ebenfalls in Holz arbeiten, muß man einen größeren Winkel geben, weil jene in der Länge der Fasern, diese normal gegen die Richtung derselben zu schneiden bestimmt sind. Ganz spitze Winkel an den Schneiden sehen wir dagegen an Messern zum Schneiden des Brodes, Fleisches und anderer sehr weicher Körper. Um den Arbeitsverlust durch Reibung herabzuziehen, der um so größer wird, je schärfer der schneidende Theil des Werkzeugs ist, polirt man die Flächen derselben und bestreicht sie in manchen Fällen mit fettigen Substanzen. Auch der Winkel, unter welchem das Werkzeug aufgesetzt wird, ist nicht ohne Einfluß auf die Wirkungsweise des Keils. Beim Ausstemmen eines Zapfenloches mit dem Lochbeitel (Fig. 188) wird dieser durch eine nach seiner Axe gerichtete Kraft so eingetrieben, daß er mit der senkrechten Fläche **AC** der einen Wand des zu bildenden Zapfenlochs parallel ist. Da die Widerstände, welche der keilförmige Theil des Lochbeitels an den Seiten **aC** und **CD** findet, sich wie diese Seiten verhalten, so wird durch den größeren Widerstand gegen **CD** die Schneide ein Bestreben erhalten, nach der linken Seite vorzudringen, und, da der Meisel wegen der Wand **aC** nicht ausweichen kann, in der Ebene **AC** fortgehen, bis die Kraft ihn nicht mehr zu treiben vermag. Wird hierauf der Meisel in verwendeter Stellung an die andere Seite des zu bildenden Zapfenlochs gebracht, so kann ebenfalls wieder ein gegen **LM** senkrechter Schnitt gebildet, der zwischen beiden Schnitten befindliche Spahn ausgehoben und abwechselnd so fortgefahren werden, bis das Zapfenloch die nöthige Tiefe erhalten hat. Das Eisen (Fig. 189)

eines gewöhnlichen Holzhobels liegt unter einem Winkel von ungefähr 45° gegen die Sohle im Kasten und so, daß die Zuschärfungsfläche nach hinten gekehrt ist. Steiler schon wird es gestellt beim Bearbeiten spröder und ästiger Holzarten und fast senkrecht oder auch so, daß die Zuschärfungsfläche vorausgeht, beim Hobeln über Quer- oder Hirnholz. Ebenso stellt man bei manchen Hobeln die Schneide des Eisens schief gegen die Breite der Sohle, damit es auf Hirnholz allmählig angreife und nicht zu tief einreiße.

XI.

Reibung stehender und liegender Zapfen; rollende Reibung. Steifigkeitswiderstand der Seile.

112. Reibung der Körper, welche sich auf einander drehen. — Wenn Maschinen-bestandtheile sich in drehender Bewegung befinden, erfolgt die Drehung um eine feste, gerade und unbiegsame Linie oder Drehaxe. Da diese Linie einen materiellen Körper tragen und deshalb unterstützt werden muß, so wird sie selbst wieder ein materieller Körper sein müssen. Wellen sind solche Maschinentheile, welche Dreharen repräsentiren, die Zapfen sind die unterstützten Theile derselben, welche sich in festen unbeweglichen Betten, Zapfenlagern, bewegen. Je nach der Lage der Drehaxe unterscheidet man liegende, stehende und geneigte Wellen. Die erstern werden durch liegende Zapfen unterstützt, welche in cylindrisch ausgehöhlten Zapfenlagern oder Pfannen laufen und diese eigentlich nur in einer Linie oder sehr schmalen Fläche berühren (Fig. 190); die stehenden Wellen (Fig. 191) laufen auf stehenden, in der Regel cylindrischen, Zapfen, welche mit ihrer Basis auf dem ebenen Boden einer Pfanne ruhen. Bei geneigten Wellen oder wenn die auf die Welle wirkenden Kräfte von der Art sind, daß sie ihr auch eine Bewegung in der Richtung der Drehaxe zu ertheilen streben, welche verhindert werden muß, sind beide Unterstützungsarten nöthig. In allen diesen Fäl-

len entspringt aus der unvollkommenen Glätte der sich berühren-den Flächen der Zapfen und ihrer Lager ein Reibungswiderstand, welcher als eine der Bewegung widerstehende Kraft auf den Zustand des Gleichgewichts Einfluß ausübt.

113. Reibung an der Basis eines Zapfens. — Wenn ein Zapfen mit seiner Grundfläche sich auf der Spurplatte eines Fußlagers dreht, so entsteht ein der Rei-bung gleitender Körper ganz analoger Widerstand, und die früher gegebenen Tafeln geben das Verhältniß desselben zum Drucke. Bezeichnet daher N den nach der Axe des Zapfens und normal zu den reibenden Flächen gerichteten Druck, f den aus den Tabellen entnommenen Reibungscoëffi-cienten, so ist fN der absolute Werth dieser Reibung. Um aber ihren Einfluß auf die Umdrehung beurtheilen zu können, genügt es nicht, die Größe derselben zu kennen, sondern es muß ihr Moment bestimmt werden. Wir werden dadurch den He-belsarm der Reibung, oder was dasselbe ist, die Entfernung eines Punctes von der Drehaxe finden, in welchem die ganze Reibung vereinigt gedacht werden kann. Denken wir uns den Normaldruck N gleichförmig über die ganze Grundfläche A des Zapfens vertheilt, und diese in Elemente von der Größe a zerlegt, so ist der Druck gegen ein solches Element $\frac{a}{A}.N$ und $f.\frac{a}{A}.N$ die Reibung an demselben. Diesen Widerstand dürfen wir uns im Mittelpuncte des Elementes angreifend und der Bewegung genau entgegengesetzt, d. i. normal zum zugehörigen Halbmesser r, vorstellen, und er-halten als dessen statisches Moment $f.\frac{a}{A}.N.r.$ Faßt man jetzt alle Elemente zusammen, welche zu einem sehr schmalen Aus-schnitte ABC (Fig. 192) gehören, so können die Reibungswi-derstände derselben als Kräfte betrachtet werden, welche mit dem mittlern Halbmesser CO einen rechten Winkel einschließen und deren Mittelkraft, weil sie sämmtlich als parallel anzu-sehen sind, ihrer Summe gleich ist und ihren Angriffspunct

im Schwerpuncte der Fläche **ABC** hat, über welche die Reibung gleichförmig vertheilt ist. Diese Resultante wird daher $f.\frac{ACB}{A}.N$ und ihr Angriffspunct wird in dem Schwerpuncte des schmalen Dreiecks d. i. in der Entfernung $\frac{2}{3}R$ vom Mittelpunkte zu suchen sein, wenn **R** der Halbmesser des Zapfens ist. Das Moment der Reibung eines Elementarausschnittes ist daher $f.\frac{2}{3}R.\frac{ACB}{A}.N.$ Stellt man sich den ganzen Kreis aus solchen Sectoren zusammengesetzt vor, so wird für jeden derselben das Reibungsmoment obige Größe haben und die Summe aller d. i. das Reibungsmoment der ganzen Kreisfläche

$$f.\frac{2}{3}R.\frac{A}{A}.N=\frac{2}{3}fRN$$

sein. Demnach kann die Reibung als eine am Halbmesser $\frac{2}{3}R$ wirkende widerstehende Kraft angesehen werden, welchen man deshalb auch den mittlern Halbmesser der Reibung nennt.

Oft kommt es vor, daß die reibende Fläche des Zapfens die Differenz zweier concentrischer Kreise ist, z. B. wenn auf eine liegende Welle eine Kraft **N** in der Richtung ihrer Axe wirkt und den Zapfen mit seinen Achseln gegen die Backen des Lagers preßt.

Ist (Fig. 193) $AC=R$ der größere und $A_1C=R_1$ der kleinere Halbmesser, so drückt $(R^2-R_1^2)\pi$ die sich reibende Ringfläche aus und die Reibungsmomente der Elementarschnitte **ACB** und A_1CB_1 sind

$$\frac{2}{3}R.f.\frac{N.ACB}{\pi(R^2-R_1^2)} \text{ und } \frac{2}{3}R\ f\frac{N.A_1CB_1}{\pi(R^2-R_1^2)}$$

Das Moment der Reibung in dem Flächenelemente AA_1B_1B ist daher der Differenz jener gleich, d. i.

$$\frac{f.N}{\pi(R^2-R_1^2)}\left\{\frac{2}{3}R.ACB-\frac{2}{3}R_1.A_1CB_1\right\}.$$

Nimmt man n solcher gleicher Elementarausschnitte im ganzen Kreise an, so besteht das Moment der Reibung für die ganze Ringfläche aus dem nfachen dieses Werthes, so daß, weil $ACB=\frac{R^2\pi}{n}$ und $A_1CB_1=\frac{R_1^2\pi}{n}$ ist,

$$n\frac{fN}{\pi(R^2-R_1^2)}\left\{\frac{2}{3}R.\frac{R^2\pi}{n}-\frac{2}{3}R_1\frac{R_1^2\pi}{n}\right\} \text{ oder}$$

$$fN.\frac{2}{3}\frac{R^3-R_1^3}{R^2-R_1^2} \text{ das Moment und}$$

$$\frac{2}{3}.\frac{R^3-R_1^3}{R^2-R_1^2}=\frac{2}{3}\frac{R^2+RR_1+R_1^2}{R+R_1} \text{ der mittlere Hebelsarm der Reibung ist.}$$

Wird die Breite des Ringes durch d und der mittlere Halbmesser durch r ausgedrückt, so ist $R=r+\frac{d}{2}$ und $R_1=r-\frac{d}{2}$, folglich der mittlere Hebelsarm der Reibung

$$r_1=\frac{2}{3}\frac{(r+\frac{d}{2})^2+(r+\frac{d}{2})(r-\frac{d}{2})+(r-\frac{d}{2})^2}{2r}$$

$$=r+\frac{d^2}{12r}, \text{ und man darf in allen Fällen, wo d gegen r klein ist, ohne erheblichen Fehler den mittlern Halbmesser des Ringes als den mittlern Hebelsarm der Reibung betrachten. Das Product aus der Reibung fN in den Weg, welchen ein Punct in der Entfernung des mittlern Hebelsarmes der Reibung von der Drehaxe macht, giebt die mechanische Arbeit der Reibung. Für eine Umdrehung z. B. erhält man sie, wenn man den mittlern Hebelsarm mit } 2\pi \text{ und mit fN multiplicirt. Da die durch die Reibung ver-}$$

lorene mechanische Arbeit um so größer wird, je stärker der Zapfen ist, so wird man den Durchmesser so klein als möglich machen. Indem aber die erforderliche Festigkeit der Verminderung der Zapfenstärke sehr bald Grenzen setzt, wendet man sogenannte Spitzzapfen an und vermindert dadurch, daß man den Zapfen kegelförmig zuspitzt (Fig. 194), sphärisch abrundet (Fig. 195) oder mit einer converen Grundfläche auf einer converen Spurplatte (Fig. 196) laufen läßt, die Standfläche und somit den mittlern Hebelsarm der Reibung. Man hat alsdann als Zapfenstärke den Durchmesser des kleinen Kreises in Rechnung zu bringen, in welchem sich Zapfen und Lager in Folge der Zusammendrückung oder der Abnutzung berühren und erlangt dabei zugleich den Vortheil, daß das Zudringen der Schmiere nach allen Theilen der Reibungsfläche erleichtert wird.

114. Reibung liegender Zapfen in ihren Lagern. Auch die Reibung von Cylindern, welche sich mit ihren Umfängen auf cylindrisch ausgehöhlten Körpern drehen, gehört zu derjenigen der ersten Art, welche wir die Reibung gleitender Körper oder die gleitende Reibung genannt haben. Sie befolgt daher auch ganz die nämlichen Gesetze und ihre Intensität steht unter denselben Einflüssen, welche in den §. 97 u. f. f. aufgezählt worden sind. Die Versuche Coulomb's zeigten zuerst, daß die Zapfenreibung unter sonst gleichen Umständen etwas geringer sey, als die Reibung gleitender Ebenen; es folgt deshalb hier eine besondere Tafel für das Verhältniß der Zapfenreibung zum Druck, aus den sorgfältigen Versuchen Morin's zusammengestellt.

Tafel für die Zapfenreibung während der Bewegung.

Angabe der sich reibenden Körper.	Zustand der Reibungsflächen.						
	trocken oder sehr wenig fettig.	fettig und mit Wasser benetzt	geschmiert und naß.	Talg, Oel od. Schweinfett auf		Wagenschmiere	Schweinefett mit Graphit
				gewöhnliche Art od.	ununterbr. geschm.		
Bronze auf Bronze	....	....	....	0,097			
» » Gußeisen	....	....	....	....	0,049		
Schmiedeeisen auf Bronze .	0,251	0,189	....	0,075	0,054	0,090	0,111
» Gußeisen	....	....	....	0,075	0,054		
Gußeisen » »	....	0,137	0,079	0,075	0,054		
» » Bronze .	0,194	0,161	....	0,075	0,054	0,065	
Schmiedeeisen auf Gayac .	0,188	....	....	0,125			
Gußeisen » »	0,185	....	....	0,100	0,092	....	0,109
Gayac » Gußeisen	....	....	....	0,116			
» » Gayac	....	....	....	....	0,070		

Zu dieser Tafel fügen wir noch folgende Bemerkungen.

Da Zapfen sich immer längere Zeit in ununterbrochener Bewegung befinden, so ist auch nur ihre Reibung während der Bewegung von Interesse. Damit keine Seitenverschiebung des Zapfens entsteht, macht man den Spielraum zwischen ihm und dem Lager möglichst klein. Wenngleich die gleitende Reibung von der Größe der sich reibenden Flächen nicht abhängt, so tritt doch bei sehr dünnen Zapfen, besonders bei solchen, welche viel Spielraum im Lager haben, der Fall ein, daß die Schmiermittel bald zur Seite herausgepreßt werden, wodurch die Zapfen in den Zustand der blos fettigen Körper versetzt werden. Ueberhaupt ist, wie auch die Tabelle nachweist, das ununterbrochene Einführen der

Schmiermittel bei Zapfen sehr zu empfehlen. Was die Schmiermittel selbst anlangt, so sollen dieselben im Allgemeinen um so dünnflüssiger und feiner genommen werden, je geringer die Belastung ist. Das Benetzen der Zapfen mit Wasser hat keinen Vortheil als den, daß es die Erhitzung der Zapfen und das Flüssigwerden der Schmiere verhindert.

115. Bestimmung des Druckes, welcher die Reibung erzeugt. — Ist ein Zapfen, welcher in seinem Lager einigen Spielraum hat, in Ruhe, so berührt er natürlich die tiefste Stelle o (Fig. 197) des Lagers in einer zu seiner Axe parallelen Linie. Wäre das Lager eine Horizontalebene, so würde der Zapfen, in drehende Bewegung versetzt, sich beständig um seinen jedesmaligen Stützpunct drehen und so sich fortwälzen. Da aber das Lager eine cylindrische Aushöhlung bildet, wird er an der krummen Fläche omp aufsteigen, bis er an einem Puncte m derselben ankommt, an welchem die Tangente uv eine solche Neigung hat, daß die Reibung den Zapfen zurückzuhalten vermag. Für das Gleichgewicht des Zapfens an diesem Puncte muß die Resultante aller auf denselben wirkenden Kräfte durch den Punct m gehen und normal zur Tangente uv gerichtet seyn. Die Reibung für sich als Kraft betrachtet hat aber die Richtung der Tangente selbst und greift im Puncte m an, daher muß auch die Mittelkraft N aller übrigen Kräfte, welche Richtung sie auch haben mag, durch diesen Punct gehen. Die in die Tangentenrichtung fallende Componente bm = ad der Kraft N wird daher auch der Reibung, welche der Normaldruck ma erzeugt, entgegengesetzt gerichtet und gleich seyn müssen. Wird md der Einheit gleich genommen, so ist die Componente der Kraft N in der Richtung der Tangente mb . N, und rechtwinkelig gegen dieselbe ma . N, die Reibung also f . ma . N, wenn f den Reibungscoefficienten aus der letzten Tafel bezeichnet. Hieraus ergiebt sich

$$mb.N = f.ma.N \text{ und } f = \frac{mb}{ma},$$ d. h. der Win-

kel, welchen der Druck N mit dem Perpendikel zur Tangente des Berührungspunctes macht, entspricht dem sogenannten Reibungswinkel.

Ferner folgt aus dem rechtwinkeligen Dreiecke mad

$$1 = \overline{ma}^2 + \overline{mb}^2 = \overline{ma}^2 \left\{ 1 + \left(\frac{mb}{ma} \right)^2 \right\}$$

$$= \overline{ma}^2 (1 + f^2) \text{ oder } ma = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}} \text{ und der}$$

die Reibung erzeugende Normaldruck

$$ma \,.\, N = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}} \text{ und die Reibung selbst}$$

$$f \,.\, ma \,.\, N = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} N$$

Man sieht leicht ein, daß der Werth $\sqrt{1 + f^2}$ von der Einheit sehr wenig abweicht, wenn f kleiner ist als $\frac{1}{3}$, so daß man in diesem Falle die Reibung f.N setzen darf.

116. Arbeitsgröße der Zapfenreibung. — Die mechanische Arbeit der Zapfenreibung läßt sich durch das Product $fN \,.\, r\omega$ aus dem Widerstande fN in den Weg $r\omega$ messen, welchen ein Punct in dem Umfange des Zapfens zurückgelegt hat, wenn r den Halbmesser des Zapfens und ω die Winkelgeschwindigkeit desselben bezeichnet. Für einen Zapfen, welcher in einer bestimmten Zeit n Umdrehungen macht, ist $\omega = 2\pi n$ und $fN \,.\, 2\pi r n$ die in derselben Zeit durch die Reibung in Anspruch genommene Arbeitsgröße. Wie bedeutend dieselbe werden kann, zeige dem Leser folgendes Beispiel. Ein Schwungrad von 12000 Kil. Gewicht mache in der Minute 40 Umdrehungen und laufe auf gußeisernen Zapfen von 0,15 Met. Durchmesser in bronzenen Lagern. Bei einem so schweren Rade ist in der Regel die Kraft zur Umdrehung im Verhältnisse zum Gewichte desselben so gering, daß man das letztere allein als Zapfendruck

betrachten kann. Dann ist, wenn wir annehmen, daß die Zapfen auf gewöhnliche Weise in Schmiere unterhalten werden, das Verhältniß der Reibung zum Drucke 0,075, die Intensität der Reibung $0{,}075 . 12000 = 900$ Kil., die mechanische Arbeit der Reibung in einer Minute

$$900 . 2 . \frac{0{,}15}{2} . 50 . \pi = 21205{,}7 \text{ km}$$

und in jeder Sekunde $353{,}4 \text{ km} = 4{,}7$ Pferdekraft. So vortheilhaft also ein Schwungrad auf den gleichförmigen Gang der Maschine hinwirkt, so kann dies doch schon wegen der Reibung, welche es verursacht, nicht ohne beträchtlichen Verlust an mechanischer Arbeit geschehen.

Wenn der Zapfen unbeweglich ist und sich dagegen das Lager um den festen Zapfen (Fig. 198) dreht, so fällt die Drehare in den Mittelpunkt der cylindrischen Höhlung und es ist der Halbmesser r_1 dieser Höhlung als Hebelsarm der Reibung in Rechnung zu bringen. Die durch die Reibung verloren gehende Arbeitsgröße wird daher fNr, ω und unter sonst gleichen Umständen und bei gleicher Stärke der Zapfen größer bei dem festen Zapfen, als bei dem beweglichen, weil r_1 nothwendig größer ist, als r.

117. Bemerkungen über die Dimensionen der Zapfen. Vortheile der schneidigen Zapfen. — Der Ausdruck $fN . r\omega$ zeigt uns, daß, wenn fN und ω bestimmte unveränderliche Größen sind, die auf die Ueberwindung der Reibung verwendete Arbeit nur noch von r abhängt oder mit der Zapfenstärke wächst. Man hat daher die Zapfen so dünn zu machen, als die Rücksicht auf ihre Festigkeit und Dauerhaftigkeit gestattet, und möglichst feste und harte Körper wie z. B. Stahl dazu zu wählen. Man sieht ferner, daß, weil die Länge des Zapfens in dem obigen Ausdrucke nicht vorkommt, diese auch keinen Einfluß auf die Arbeitsgröße der Reibung hat. In den Fällen daher, wo wie bei hölzernen Wagenaxen wegen der allmähligen Abnutzung der Zapfen, diese ungleich stärker hergestellt wer-

den müssen, als die Belastung derselben fordert, ist es vortheilhaft, die Zapfen sammt ihren Lagern zu verlängern, weil die Abnutzung für jedes Element der sich reibenden Flächen in demselben Maaße abnimmt, als diese Flächen selbst zunehmen.

Um Verschiebungen und Schwankungen der Zapfen in der Richtung ihrer Axe zu vermeiden, giebt man denselben zuweilen konische Verstärkungen (Fig. 199), welche in gleichgeformten Vertiefungen der Lager laufen; man würde aber sehr irren, wenn man glauben wollte, die mechanische Arbeit der Reibung würde dadurch vermindert, daß die reibenden Flächen jetzt auf eine kreisförmige Kante, eine blose Linie, reducirt sind. Die Länge, auf welcher der Zapfen aufliegt, ist für die Arbeit der Reibung gleichgiltig; nicht von ihr, sondern von dem Umfange des reibenden Cylinders, hängt sie ab; die Arbeitsgröße der Reibung kann daher eher zu- als abgenommen haben und man wird, um dies zu verhüten, die Schärfe der angesetzten Scheibe gar nicht mit dem Lager in Berührung bringen dürfen, damit nicht der Hebelsarm der Reibung unnöthig verlängert werde. Wenn die Kraft, welche in der Richtung der Axe einer Welle wirkt, sehr beträchtlich ist, dann muß natürlich auch die Reibung an den Achseln oder an den Verstärkungen des Zapfens mit in Rechnung gebracht werden. Die mechanische Arbeit derselben wächst aber, wie wir gesehen haben, mit dem mittlern Halbmesser der sich reibenden Ringfläche, welcher auf alle Fälle größer noch als der des Zapfens ist. Es ist daher in einem solchen Falle vortheilhaft, den Zapfen über das Lager hinauszuführen, und am Ende mit einer abgerundeten Spitze zu versehen, welche sich gegen eine feste Docke mit einer Spurplatte (Fig. 200) stemmt; hierdurch kann der Hebelsarm der Reibung an der Basis beinahe beliebig verkleinert werden. Sehr vermindern kann man in manchen Fällen die Arbeitsgröße der Reibung auch dadurch, daß man, ohne das Tragvermögen und die Festigkeit zu verringern, den Hebelsarm der Reibung sehr klein macht, indem man Messerzapfen (Fig. 201) anwendet, welche die Form

dreiseitiger Prismen haben und mit einer etwas abgerundeten Kante auf dem Lager laufen. Die Bewegung erfolgt dann um den Mittelpunct des kleinen Bogens, nach welchem die Schneide abgerundet ist, und wegen der Kleinheit des Halbmessers r ist auch die Arbeitsgröße der Reibung $fN.r\omega$ nicht beträchtlich. Freilich sind solche Zapfen nur anwendbar für solche Stücke, welche blos kleine Schwingungen zu machen haben, wie etwa Pendel, Gewichtswagen und dergl.

118. Wälzende Reibung. — Obschon wenn ein Körper sich auf einem anderen fortwälzt, so daß immer neue Elemente der Oberflächen mit einander in Berührung kommen und die außer Berührung tretenden sich rechtwinkelig gegen die gemeinschaftliche Tangente trennen, eigentlich keine Reibung entstehen kann, so wollen wir doch für den Widerstand, welchen ein Körper bei seinem Fortrollen über eine Ebene leistet, uns des allgemein üblichen Ausdrucks „wälzende Reibung oder Reibung zweiter Art" bedienen. Wird eine Walze auf einer Ebene fortgerollt, so wickelt sich die Oberfläche derselben auf der Ebene ab und es entsteht eigentlich keine Reibung, sofern nur die Walze vollkommen cylindrisch und ihre Oberfläche vollkommen glatt ist. Der Widerstand, welcher aus der Berührung der Walze mit der Ebene hervorgeht, muß daher anderer Art sein als der Reibungswiderstand. Man wird sich von seiner Entstehung einen deutlichen Begriff machen, wenn man bedenkt, daß alle Körper mehr oder weniger zusammendrückbar sind und einen gewissen Grad der Elasticität besitzen, vermöge dessen sie ihre Gestalt wieder anzunehmen streben, nachdem der Druck aufgehört hat zu wirken. Eine Walze, welche unter einem Drucke auf einer Horizontalebene fortgerollt wird, wird daher nicht allein Eindrücke in der Ebene hervorbringen, sondern auch sich selbst an der Berührungsstelle abplatten, so daß sie gleichsam beständig gehoben werden muß, wozu in jedem Augenblicke eine bestimmte Arbeitsgröße erforderlich ist. Die ersten Versuche über die wälzende Rei-

bung verdanken wir Coulomb, welcher daraus das durch die Experimente Morin's bestätigte Gesetz ableitete, daß dieselbe dem Drucke direkt und dem Halbmesser umgekehrt proportional sei. Es ist, wenn r den Halbmesser der Walze, N den Druck derselben gegen die Unterlage, f einen constanten von der Beschaffenheit der Berührungsflächen abhängigen Coefficienten bezeichnet, der absolute Werth dieses Widerstandes oder die zur Ueberwindung desselben nöthige Kraft, in der Bewegungsrichtung und auf die Axe der Walze wirkend, nach Coulomb $F = f_1 \frac{N}{R}$. Eine Kraft am Umfange der Walze und tangential zu ihrem Angriffspuncte T (Fig. 202) wird daher nur $\frac{1}{2} f_1 \frac{N}{R}$ betragen müssen, weil ihr Hebelsarm doppelt so groß ist, als im vorigen Falle. Coulomb fand

$f_1 = 0{,}00097$ für Walzen von Gayac auf Eiche
$f_1 = 0{,}00162$ „ „ „ Ulme „ „ ,

wenn F und N in Kilogrammen und R in Metern gegeben ist. Um z. B. eine Walze von Ulmenholz, welche mit 100 Kil. belastet und 0,4 Met. stark ist, auf eichenen horizontalliegenden Pfosten fortzuwälzen, würde eine bei T angreifende

Kraft $\frac{1}{2} . 0{,}00162 . \frac{100}{0{,}2} = 0{,}41$ Kil. betragen müssen.

Man sieht daraus, wie gering der Widerstand der wälzenden Reibung ist und daß man denselben bei glatten und harten Körpern ganz vernachlässigen darf. Auch erklärt sich daraus, weshalb das Fortschaffen schwerer Steinblöcke oder anderer großer Lasten auf Walzen weit vortheilhafter ist, als das Schleifen derselben. Man bedarf dazu dreier Walzen; zwei davon (Fig. 203) tragen immer die Last und laufen dabei auf Pfosten, während die dritte die Last in dem Augenblicke aufnimmt, wo sie die hintere Walze verläßt.

119. Verminderung der gleitenden Reibung durch Erzeugung von Walzenreibung. —

Trägt eine Walze (Fig. 204), welche mit Zapfen in Lagern liegt, eine Platte AB, auf welcher eine Last P ruht, so würde, wenn man die Walze hinderte, sich zu drehen, bei M eine gleitende Reibung fP entstehen, welcher die Kraft F zum Fortschieben der Last gleich sein müßte. Wenn aber statt dessen die Walze sich selbst überlassen wird, so verursacht in den meisten Fällen der Widerstand der wälzenden Reibung die Drehung derselben, so daß am Umfange der Zapfen eine Zapfenreibung $f_1 P$ *) entsteht.

Bezeichnet daher r den Zapfenhalbmesser, R den der Walze, so ist $F.R\omega = f_1 P \cdot r\omega$ die mechanische Arbeit der Kraft F und der Zapfenreibung fP, folglich

$F = \frac{r}{R} f_1 P$ die auf den Umfang der Rolle reducirte Zapfenreibung. Indem man hierzu noch den Widerstand der wälzenden Reibung $f_2 \frac{P}{R}$ rechnet, wie er sich für den Umfang der Rolle ergiebt, erhält man

$F = \frac{r}{R} f_1 P + f_2 \frac{P}{R}$ als die am Umfange der Rolle erforderliche Kraft, und sieht daraus, daß durch die Verwandlung der gleitenden Reibung zwischen der Rolle und der Platte in wälzende und Zapfenreibung der Widerstand fP auf $f_1 \frac{r}{R} P + f_2 \frac{P}{R}$ herabgezogen wird. Je größer also der Rollenhalbmesser und das Verhältniß desselben zum Zapfenhalbmesser ist, desto geringer wird dieser Widerstand. So lange die gleitende Reibung fP im Puncte M, durch welche eigentlich die Kraft auf die Walze übergetragen wird, größer

---

*) genauer $\frac{f_1}{\sqrt{1+f_1^2}} \sqrt{P^2+F^2}$; da aber f gewöhnlich kleiner als $\frac{1}{3}$ und F viel kleiner als P ist, so kann man dafür $f_1 P$ setzen.

ist, als jener Werth, so lange wird auch wirklich die Rolle sich drehen; wären aber die sich berührenden Flächen sehr vollkommen polirt und f, was fast nie vorkommt, so klein, daß fP kleiner würde, als $\frac{r}{R} f_1 P + f_2 \frac{P}{R}$, so würde sich die Walze nicht mehr drehen. Von dem Vortheile, durch Rollen, welche mit Zapfen in festen Lagern sich drehen, die mechanische Arbeit der Reibung zu vermindern, macht man in vielen Fällen Gebrauch; wir erinnern nur an den Klotzwagen einer Sägemühle und an die Leitung der Gestänge auf Walzen.

Auch die Zapfenreibung läßt sich durch Vermittelung der wälzenden Reibung sehr herabziehen. Wenn nämlich ein Zapfen bestimmt ist, eine sehr große Last zu tragen, so muß seine Stärke dieser Last angemessen sein und es entsteht eine Zapfenreibung im festen Lager, welche um so größer ist, je größer der Halbmesser des Zapfens und je größer der Druck ist. Legt man aber den Zapfen auf die Umfänge zweier großer Räder (Fig. 205), sogenannter Frictionsräder oder Frictionsrollen, welche sich selbst wieder um Zapfen drehen, so wird die Reibung des Zapfens A in wälzende Reibung bei b und c, welche außerordentlich gering ist, und in Zapfenreibung bei B und C verwandelt, von welcher sogleich gezeigt werden soll, daß sie weit geringer ist, als die des Zapfens A. Es möge dabei von der wälzenden Reibung wegen ihrer außerordentlichen Kleinheit ganz abgesehen werden und für die Radhalbmesser die Bezeichnung R und R_1, für die viel kleinern Zapfenhalbmesser die Bezeichnung r und r_1 gelten. Durch Zerlegung des Druckes P auf den Zapfen A in zwei Seitenkräfte, welche nach den Aren der Frictionsrollen gerichtet sind, erhält man die Pressungen N und N_1, welche, wenn die Frictionsräder sich nicht drehen ließen, zu den Reibungen $fN + fN_1$ am Umfange dieser letztern oder des Zapfens A Veranlassung geben würden. Durch die Beweglichkeit jener Räder aber

wird diese Reibung auf die Zapfen B und C übergetragen und erfordert am Umfange der Frictionsscheiben, oder, was dasselbe ist, am Umfange des Zapfens A eine Kraft

$f.N.\frac{r}{R} + fN_x \frac{r_1}{R_1}$. Nun ist es klar, daß dieser Werth um so kleiner ist gegen $fN + fN_x$, je größer die Rollenhalbmesser im Verhältniß zu den Zapfenhalbmessern sind. Man würde auf diese Weise die Verminderung der Reibung noch weiter treiben können, wenn man die Zapfen B und C wiederum auf Frictionsrollen legen wollte. Allein trotz der Vortheile, welche die vorige Betrachtung für diese Anordnung nachweist, ist sie in der Ausübung doch nur in einzelnen Fällen anwendbar, weil sehr leicht die Frictionsräder sich ungleichförmig abführen, so daß auf ihren Umfängen Vertiefungen entstehen, welche in der Folge die Drehung derselben ganz hindern. In der Cathedrale von Metz befindet sich eine wenigstens 18000 *) paris. Pfund schwere Glocke, welche mit ihren Zapfen (Fig. 206) auf eine ganz ähnliche Weise auf Frictionsräder gelegt ist. Da die Glocke nur kleine Schwingungen zu beiden Seiten der Lothlinie macht, so genügen anstatt der Rollen blose Ausschnitte derselben, von welchen die beiden zur Seite des Zapfens a durch zwei Stangen mit den Enden eines Balanciers verbunden sind, damit keiner derselben ganz herabsinken kann, wenn der Zapfen durch die Centrifugalkraft der Glocke gegen den anderen getrieben wird.

Nächst den festen Rollen wollen wir jetzt solche betrachten, welche sich auf einer Ebene AB (Fig. 207) fortbewegen können, und welche die Last P nicht auf ihrem Umfange, sondern auf ihrem Zapfen tragen. Sehen wir von der wälzenden Reibung bei M ab, so ist nach dem Früheren die am Umfange der Rollen erforderliche Kraft zur Ueberwindung der Reibung $\frac{r}{R} f.P$, wenn r den Halbmesser des

*) 1 Pariser Pfund = 0,4894 Kil.

Zapfens, R den der Walze und f den Coefficienten der Zapfenreibungen bezeichnet. Der Weg, welchen diese Kraft zurücklegen würde, muß aber, weil sich die Rollen auf der Ebene AB abwälzen, genau dem Wege der Last selbst gleich seyn, so daß die zur Fortbewegung derselben nöthige Kraft ebenfalls $\frac{r}{R}$ f. P seyn wird. Hiermit ist die Theorie der Möbelrollen, sowie der Wagenräder gegeben. Nur ist es bei den letztern der Fall, daß sich nicht die Axen mit den Rädern drehen, sondern daß die Axen fest am Wagen sind und die Räder sich um dieselben drehen; mithin muß der etwas größere Halbmesser der Nabenstatt des Halbmessers der Axen gesetzt werden. Uebrigens darf bei den Fuhrwerken die wälzende Reibung nicht außer Acht gelassen werden, da Räder, welche auf einer Straße fortrollen, beständig Hindernisse finden, welche sie überspringen oder zermalmen müssen. Bei horizontaler Bahn muß z. B. die Zugkraft auf Kiesweg oder Steinschlag $\frac{1}{8}$, auf festgefahrnem Steinschlag $\frac{1}{12}$, auf gepflastertem Wege $\frac{1}{20}$, auf recht glattem Fahrwege $\frac{1}{30}$ der Last betragen.

Wenn ein Wagen auf sehr glatter Bahn geht, wie auf Eis oder festgefahrnem Schnee, kommt es vor, daß die Räder sich gar nicht drehen, weil der Widerstand der Räder am Boden geringer ist, als die Zapfenreibung. Tritt dieser Fall bei einer Locomotive auf der Eisenbahn ein, so werden die Räder nur auf den Schienen schleifen, ohne vorwärts zu rücken. Wegen der geringen gleitenden Reibung, welche Eis und Schnee verursachen, kann man die Räder entbehren und sich mit Vortheil der Schlitten bedienen. Sowohl wegen der Zapfenreibung, als auch wegen der Walzenreibung würden Wagenräder um so vortheilhafter sein, je größer sie sind, allein die Kostspieligkeit sehr großer Räder und die Verminderung der Stabilität der Ladung durch dieselben setzen hier Grenzen. Wenn die Vorder- und Hinterräder eines Wagens von ungleicher Größe sind, muß man die größe-

ren Hinterräder stärker belasten, als die Vorderräder, damit der Widerstand an den Umfängen nicht zu sehr verschieden ist und sie ungleich abnutzt.

120. Steifigkeitswiderstand der Seile. — Ein Seil, welches um einen Cylinder, eine Scheibe, Rolle oder Trommel gelegt ist, und an welchem eine Kraft **F** (Fig. **208**) die Last **Q** emporhebt, setzt vermöge des Mangels an vollkommener Biegsamkeit in jedem Augenblicke der Kraft F einen Widerstand entgegen, welcher einen Ueberschuß der bewegenden Kraft über die Last P erforderlich macht. Offenbar wird dieser Widerstand von der Spannung des Seiles oder von der Last P abhängen. Denkt man sich aber das Seil unbelastet, so wird doch auch noch eine Kraft nöthig sein, um das unbelastete Seil über die Rolle zu biegen, und es muß deßhalb ein anderer Theil des gesammten Widerstandes eines belasteten Seiles blos von dem Grade der Drehung und der Textur desselben abhängen. Bezeichnet man durch a diesen von der Größe der Belastung unabhängigen und für ein und dasselbe Seil constanten, durch b den zu jeder Gewichtseinheit der Last gehörigen Theil des Widerstandes, so wird durch $a + bP$ die Steifigkeit eines Seiles bei irgend einer Belastung P gemessen. Die Versuche Coulomb's haben nun gezeigt, daß wenn ein und dasselbe Seil bei der nämlichen Belastung auf verschiedene Rollen gebracht wurde, die Widerstände sich umgekehrt, wie deren Durchmesser verhielten. Wenn der Steifigkeitswiderstand eines Seiles auf einer Rolle von einem der Einheit gleichen Durchmesser $a + bP$ ist, beträgt er also bei einer Rolle vom Durchmesser D, $\frac{a + bP}{D}$. Besäße man nun eine Tabelle, in welcher für alle üblichen Seilstärken die Coefficienten a und b zusammengestellt wären, wie sie sich für ein Seil ergeben, welches um eine Rolle vom Durchmesser $= 1$ geschlungen ist, so würde man durch obige Formel den Widerstand leicht finden können, welchen dasselbe bei einer andern

Belastung und auf einer andern Walze leistet. Begreiflicherweise aber konnten die Versuche nicht auf alle mögliche Seildicken ausgedehnt werden, daher hat Coulomb die Abhängigkeit des Steifigkeitswiderstandes von der Seilstärke ausgemittelt, so daß man nun im Stande ist, aus den einer gewissen Seilstärke entsprechenden Coefficienten a und b deren Werthe bei einer anderen Seilstärke zu finden. Aus seinen Versuchen erkannte er, daß 1) bei neuen ungetheerten Seilen, sowohl trocknen als nassen, der Steifigkeitswiderstand dem Quadrate der Seilstärke, 2) bei gebrauchten trocknen und nassen der Quadratwurzel aus dem Cubus der Seilstärke, 3) bei getheerten Seilen der Anzahl der Fäden und 4) bei einzelnen Fäden der Stärke derselben proportional ist. Ueberdieß bemerkte derselbe Experimentator, daß bei nassen Seilen der Werth a immer doppelt so groß ist, als bei trockenen. Die folgende Tafel enthält die Werthe der Coefficienten a und b in Kil. für mehrere verschiedene Seilstärken und unter der Voraussetzung, daß die Belastung in Kilogr. und der Durchmesser in Metern in Rechnung gebracht wird.

Tafel der Widerstände, welche die um eine Walze von 1 Meter Durchmesser zu biegenden Seile leisten.

1. Neue Seile. — Der Widerstand wächst mit dem Quadrate der Seilstärke.

Seilstärke in Centim.	Natürliche Steifigkeit oder Werth von a für		Steifigkeit f. jedes Kil. der Belastung od. Werth von b.
	trockene Seile.	nasse Seile.	
1	0,055615	0,111230	0,0024346
2	0.222460	0,444920	0,0097382
4	0,880840	1,779680	0,0389528
8	3,559360	7,118720	0,1558112

$\frac{d_1}{d}$	$\left(\frac{d_1}{d}\right)^2$	$\left(\frac{d_1}{d}\right)^{\frac{3}{2}}$
0,50	0,25	0,354
0,60	0,36	0,465
0,70	0,49	0,586
0,80	0,64	0,715
0,90	0,81	0,854
1,00	1,00	1,000
1,10	1,21	1,154
1,20	1,44	1,315
1,30	1,69	1,482
1,40	1,96	1,657.
1,50	2,25	1,837

2. Gebrauchte Seile. — Der Widerstand wächst mit der Quadratwurzel aus dem Cubus der Seilstärke.

Seilstärke in Centim.	Natürliche Steifigkeit oder Werth von a für		Steifigkeit f. jedes Kil. der Belastung od. Werth von b.
	trockene Seile.	nasse Seile.	
1	0,055615	0,111230	0,0024346
2	0,157279	0,314558	0,0068850
4	0,444785	0,889570	0,0194708
8	1,257852	2,515704	0,0550634

3. Getheerte Seile. — Der Widerstand ist proportional der Fädenzahl.

Anzahl der Fäden.	Natürliche Steifigkeit oder Werth von a.	Steifigkeit für jedes Kil. Belastung oder Werth von b.
6	0,212080	0,0025968
15	0,105928	0,0060592
30	0,349600	0,0125514

Will man mit Hülfe dieser Tafeln den Steifigkeitswiderstand unter gegebenen Verhältnissen und für eine Seilstärke d_1 oder Fädenzahl n_1 finden, welche nicht in den Tafeln enthalten ist, so nehme man die Coefficienten für ein Seil, dessen Durchmesser d oder Fädenzahl n mit der gegebenen Größe dafür am nächsten übereinstimmt, und multiplicire dieselben mit $\left(\frac{d_1}{d}\right)^2$, $\left(\frac{d_1}{d}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{n_1}{n}$ oder $\frac{d_1}{d}$, je nachdem man es mit neuen, gebrauchten, getheerten Seilen oder mit blosen Fäden zu thun hat. Die oben beigefügte Tafel gestattet, sogleich die 2ten und $\frac{3}{2}$ten Potenzen des Verhältnisses der Seilstärken abzulesen. *)

*) Um die Tafeln auch für Rechnungen in anderen Maaßen und Gewichten zu gebrauchen, bezeichne α das Verhältniß des Kilogr, zum Pfundgewichte eines Landes, β das Verhältniß des Meters zum Fußmaaße desselben Landes. Zuerst verwandle man die in Fußen gemessene Seilstärke dadurch, daß man sie mit 100 multiplicirt und durch β dividirt, in Centimeter, um damit aus den Tafeln auf die oben angegebene Weise die der gegebenen Seilstärke oder Fädenzahl entsprechenden Coefficienten, welche hier mit a_1 und b_1 bezeichnet werden mögen, zu finden. Der Widerstand W und die Belastung P, beide in Pfunden, geben $\frac{W}{\alpha}$ und $\frac{P}{\alpha}$ Kil. und der Durchmesser D in Fußen beträgt $\frac{D}{\beta}$ Meter, so daß $\frac{W}{\alpha} = \frac{a_1 + b_1 \frac{P}{\alpha}}{\frac{D}{\beta}}$ und

$W = \beta . \frac{\alpha a_1 + b_1 P}{D}$ Pfund wird.

Für Preußen ist $\alpha = 2{,}1381$; $\beta = 3{,}1862$,
„ Oesterreich „ $\alpha = 1{,}7857$; $\beta = 3{,}1634$,
„ Bayern „ $\alpha = 1{,}7857$; $\beta = 3{,}4263$,

Ein schon gebrauchtes nasses Seil $1\frac{1}{3}$ Zoll = 1/9 preuß. Fuß Stärke sei über eine Rolle von 1,5 pr. Fuß Durch-

Man verlange z. B. den Steifigkeitswiderstand zu erfahren, welchen ein neues trockenes Seil von 3, 2 Centim. Stärke auf einer Rolle von 0,45 Met. Durchmesser verursacht, wenu es mit 400 Kil. belastet wird. Die erste Tafel giebt für die Seilstärke von 4 Centim., welche der gegebenen am nächsten kommt, $a = 0{,}889840$ und $b = 0{,}0389528$. Das Verhältniß $\frac{d_1}{d}$ ist $\frac{3{,}2}{4} = 0{,}8$ wozu man in der zweiten Colonne der angehängten Tafel 0,64 findet. Die Coefficienten a und b betragen demnach für den vorliegenden Fall $0{,}64 . 0{,}889840 = 0{,}569498$

---

messer geschlagen und mit 1000 pr. Pfund belastet; man soll den Steifigkeitswiderstand in pr. Pfunden angeben.

Die Seilstärke beträgt $\frac{100}{3{,}1862} . \frac{1}{9} = 3{,}487$ Centim; dieser Zahl kommt in den Tafeln die Seilstärke 4 Centim. am nächsten, welche die Coefficienten, $a = 0{,}889570$ und $b = 0{,}0194708$ giebt. Aus dem Verhältniß $\frac{d_1}{d} = \frac{3{,}487}{4} = 0{,}87$ oder beiläufig 0,90 folgt $\left(\frac{d_1}{d}\right)^{3/2} = 0{,}854$, mithin $a_1 = 0{,}854 . 0{,}889570 = 0{,}7596927$ und $b_1 = 0{,}854 . 0{,}0194708 = 0{,}0166281$. Es ist daher der Widerstand $W = 3{,}1862 . \frac{2{,}1381 . 0{,}7596927 + 0{,}0166281 . 1000}{1{,}5}$

$= 58{,}15$ pr. Pfund.

Da eigentlich der Werth von $\frac{d_1}{d} = 0{,}87$ zwischen 0,80 und 0,90 fällt, so muß auch $\left(\frac{d_1}{d}\right)^{3/2}$ zwischen 0,715 und 0,854 liegen. Durch Interpoliren erhält man den genaueren Werth von $(0{,}87)^{3/2}$ aus $\frac{(0{,}87)^{3/2} - 0{,}715}{0{,}854 - 0{,}715} = \frac{0{,}87 - 0{,}80}{0{,}90 - 0{,}80}$ zu $(0{,}87)^{3/2} = 0{,}812$ und wenn man hiermit, statt mit 0,854 die Coeff. a und b multiplicirt, $W = 55{,}29$ Pfund.

und $0{,}64 . 0{,}0389528 = 0{,}0249298$ und der Widerstand selbst $\frac{0{,}569498 + 0{,}0249298 . 400}{0{,}45} = 23{,}42$ Kil.

Den Steifigkeitswiderstand einzelner Fäden findet man ebenfalls aus den obigen Tafeln, wenn man die Coefficienten nach dem Verhältnisse der Durchmesser der Fäden reducirt. Ein neuer nasser Faden z. B. von 3 Millim. = 0,3 Centim. Stärke, über eine Rolle von 0,2 Met. Durchmesser geschlagen und mit 10 Kil. belastet, verursacht einen Widerstand von $\frac{3}{10} . \frac{0{,}111230 + 0{,}0024346 . 10}{0{,}2} = 0{,}2034$ Kil.

XII.

Vom Hebel.

121. Verschiedene Arten des Hebels. — Der Hebel ist ein fester Körper von beliebiger Gestalt, welcher an irgend einem Puncte, dem Stützpuncte, um welchen er sich frei bewegen kann, aufliegt, während außerhalb dieses Punctes Kräfte auf ihn wirken. Am gewöhnlichsten ist der Hebel, für sich als einfache Maschine angewendet, eine Stange, welche entweder um cylindrische oder um schneidige Zapfen oder auch nur um eine an ihm selbst befindliche scharfe Kante drehbar ist. Um die verschiedenen Arten der Hebel zu unterscheiden, hat man sie in drei Classen gebracht. Man nennt sie nämlich Hebel der ersten Art, wenn Kraft und Last an entgegengesetzten Seiten des Stützpunctes angreifen, Hebel der zweiten Art, wenn Kraft und Last an einer und derselben Seite des Stützpunctes angreifen, die Last aber näher an demselben ist als die Kraft, und Hebel der dritten Art, wenn der Angriffspunct der Kraft zwischen dem der Last und dem Stützpuncte liegt. Diese Unterschiede sind jedoch nicht wesentlich und haben auf die Bedingungen des Gleichgewichts nicht den mindesten Einfluß.

122. Gleichgewicht des Hebels. — Kann sich ein Hebel nur in einer durch den Stützpunct gehenden Ebene drehen (Fig. 209), so müssen Kraft und Last in derselben Ebene liegen, damit nicht Nebenhindernisse hervorgerufen werden, welche dem Zwecke des Hebels fremd sind. Nun erinnern wir uns ferner aus den Lehrsätzen über die Momente, (§. 16 d. II. Abth. u. s. f.), daß für den Gleichgewichtszustand der Kräfte um eine Drehare diese die Mittelkraft derselben aufnehmen muß, so daß das Moment die-

ser Resultante in Bezug auf die Drehaxe Null ist. Dies fordert für das Gleichgewicht am Hebel, daß die Resultante N der auf den Hebel wirkenden Kräfte P und Q, welche durch das Parallelogramm der Kräfte leicht gefunden werden kann, durch den Stützpunct gehe und daß das Moment der Kraft P dem der Last oder des Widerstandes Q gleich sei. Die Rückwirkung der festen Unterlage des Hebels bringt aber Reibung hervor, welche der Resultante N proportional ist und von der bewegenden Kraft P mit überwunden werden muß, so daß zu dem Momente der Last Q auch noch das der Reibung fN zu rechnen ist. Man erhält demnach, wenn r der Halbmesser des am Hebel befindlichen Zapfens ist,

$P.AB = Q.AC + fN.r$ und wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des bewegten Hebels bezeichnet,

$P.AB\omega = Q.AC\omega + fN.r\omega$, woraus man sieht, daß beim Hebel die mechanische Arbeit der Kraft der Summe der mechanischen Arbeiten sowohl des Widerstandes Q als auch der Reibung fN gleich sein muß. Will man auf das eigene Gewicht des Hebels Rüchsicht nehmen, so kann man dasselbe als eine senkrechte Kraft betrachten, welche im Schwerpunkte angreift, und das Moment derselben zu dem Momente der Kraft oder Last addiren, je nachdem dieses Gewicht mit der erstern oder mit der letztern nach einerlei Seite zu drehen strebt. In der Regel kommt das Gewicht des Hebels der Kraft zu Hülfe, so daß es vortheilhaft erscheint, bei der Hebung schwerer Lasten schwere und starke Hebel anzuwenden.

123. Anwendung des Hebels und Vortheile desselben. — Da bei einer großen Belastung des Hebels der cylindrische Zapfen sehr stark, mithin die durch die Reibung verlorne Arbeitsgröße sehr beträchtlich werden würde, und da der Hebel keine stetig kreisförmige Bewegung zu machen hat, so kann man bei demselben von dem Vortheile der schneidigen Zapfen Gebrauch machen und entweder ihm selbst eine scharfe Kante geben, mit welcher er sich gegen eine feste Unterlage stützt (Fig. 211), oder ihm die scharfe Kante einer

Unterlage zur Unterstützung geben (Fig. 210). Alsdann darf von der Reibung ganz abgesehen, also P . AB = Q . AC und P . ABω = Q . ACω gesetzt werden, woraus man sieht, daß diese einfachste aller Maschinen die Arbeitsgröße der Kraft ganz unvermindert auf die Last überträgt. Ein anderer Vortheil des Hebels besteht darin, daß man durch eine blose Verlegung des Stützpunctes das Verhältniß von Kraft und Last beliebig gestalten kann, daß man daher im Stande ist, mit Hülfe dieses mechanischen Werkzeugs eine sehr kleine Kraft zur Ueberwindung eines sehr großen Widerstandes, zur Bewegung einer sehr großen Last zu verwenden. Natürlich darf man dabei nicht vergessen, daß der Weg der Last gegen den der Kraft in demselben Verhältnisse kleiner sein wird, in welchem die Last größer ist, als die Kraft.

Die Brechstange, der Hebebaum, der Geißfuß der Maurer und Steinbrecher (Fig. 212) sind Hebel, welche ihre Drehkante A an sich selbst haben. Die Arbeiter, welche sich dieser Werkzeuge bedienen, legen diese Kante auf einen harten Körper, schieben den Fuß AC des Hebels unter den zu hebenden Körper und drücken das Ende B nieder, indem sie sich bei großen Lasten mit ihrem ganzen Gewichte auf dasselbe legen. Je weiter der Fuß untergeschoben, je näher die Last dem Stützpuncte A ist, desto größer ist das Verhältniß der Hebelsarme von Kraft und Last, desto wirksamer wird der Hebel sein. Ist der Körper so weit gehoben, als dnrch ein Spiel des Hebels möglich ist, so werden Keile untergelegt, um ihn in dieser Höhe zu erhalten und man kann, wenn man von Neuem den Hebel untersetzt und dabei seinen Stützpunct durch eingeschobene Unterlagen erhöht, die Last wieder um ein Stück emporheben u. s. f. Um Pfähle auszuziehen, bedient man sich eines langen Hebels (Fig. 213), welcher an einem Ende mit einem eisernen Hacken versehen ist, an welchem der Pfahl mit einem Seile oder einer Kette befestigt wird. Man rückt nun eine Unterlage mit einer scharfen Kante so nahe als möglich an den Pfahl, drückt den Hebel am andern Ende nieder, erhöht hierauf, wenn der Pfahl

nachgegeben hat, die Unterlage und fährt so fort, bis der Pfahl ausgehoben ist.

Je größer die Last im Verhältniß zur Kraft ist, desto kleiner muß auch das Verhältniß der Hebelsarme von Last und Kraft seyn; man wird daher eine große Last auf einmal nur auf eine sehr geringe Höhe heben können und das Spiel des Hebels oft wiederholen müssen, um eine nur einigermaßen beträchtliche Höhe mit der Last zu erreichen. Es wird sich daher auch der Hebel nicht eignen, um große Lasten auf eine bedeutende Höhe zu erheben. Es giebt besondere Vorrichtungen, sogenannte Hebeladen, vermittelst welcher bei einem Hebel, welcher zum Heben schwerer Lasten gebraucht wird, die Last nach jedem Hube auf der erreichten Höhe erhalten und der Stützpunct erhöht wird, damit ein neuer Hub bewirkt, und so durch wiederholte Spiele des Hebels die beabsichtigte Höhe erreicht werden kann. Aus Fig. 214 sehen wir die Einrichtung einer Hebelade, welche man die deutsche nennt und welche hauptsächlich bestimmt ist, Holzstämme auf Schleifen oder Wagen zu laden. In die Oeffnung zwischen den beiden Pfosten der Lade wird der eiserne Kopf eines Hebels eingeschoben, in welchem unten zwei halbrunde Lager ausgehöhlt sind, womit sich derselbe abwechselnd auf zwei Bolzen stützt, welche nach und nach in immer höhere Löcher der Pfosten gesteckt werden. Die Anwendungen des Hebels sind übrigens außerordentlich mannigfach und bei einer Menge von Werkzeugen und Instrumenten kommt der Hebel bald in dieser bald in jener Gestalt vor. Wir begnügen uns, nur noch einige Fälle hier anzudeuten. Scheeren und Zangen sind aus Hebeln der ersten Art zusammengesetzt. Die Lade der Flachsbreche, das Messer der Futterschneidmaschine wirken als Hebel der zweiten Art, und die Tritte und Schemel der Spinnräder, Webstühle und Drehbänke sind fast immer Hebel der dritten Art.

XIII.

Berechnung der Räder und ihrer Widerstände.

124. Gleichgewicht der Kräfte an einem Rade, mit Rücksicht auf die Zapfenreibung. —

Nachdem wir schon in den Paragraphen 55 u. s. w. der IIten Abth. die Bedingungen des Gleichgewichts eines um eine Axe drehbaren festen Körpers kennen gelernt haben, wollen wir uns hier unter solchen Körpern cylindrische Räder oder Scheiben vorstellen, welche sich um Zapfen drehen können, und die Reibung an den Zapfen mit in Rechnung ziehen. Wir nehmen dabei an, daß die Kraftrichtungen ganz in die Ebene der Räder fallen, weil jede andere Richtung der Kräfte blos die Widerstände vermehren würde, und unterscheiden zwei Fälle, je nachdem die Perpendikel aus der Drehaxe gegen die Kraftrichtungen gleich oder ungleich sind.

1ter Fall. Wirken zwei Kräfte F und Q (Fig. 215) in gleichen Abständen von der Drehaxe, also tangential am Umfange des Rades oder eines zu demselben concentrischen Kreises, so müssen, da für den Gleichgewichtszustand die Arbeitsgrößen beider Kräfte einander gleich sind und ihre Angriffspuncte gleiche Bögen durchlaufen, diese Kräfte einander selbst gleich seyn. Nehmen wir aber auf die Reibung des Zapfens am Lager Rücksicht, so sind es nicht mehr blos zwei Kräfte, welche auf das Rad wirken, sondern drei, und dieses kann nur im Gleichgewichte seyn, wenn die Resultante dieser drei Kräfte durch den Berührungspunct zwischen dem Zapfen und dessen Lager geht. Dieser Punct ist es aber, in welchem die Reibung wirkt, mithin wird auch die Resultante N der beiden andern Kräfte P und Q, der Druck,

welcher die Reibung fN erzeugt, durch denselben gehen müssen. Bezeichnet daher R den Halbmesser des Kreises, welchen die Kraftrichtungen berühren, r den Zapfenhalbmesser und ω die Winkelgeschwindigkeit, so hat die Arbeitsgröße $F.R\omega$ der Kraft die Summe der Arbeitsgrößen $Q.R\omega$ und $fN.r\omega$ von Widerstand und Reibung zu überwinden. Es ist demnach

$$F.R\omega = Q.R\omega + fN.r\omega \text{ oder } FR = QR + fNr$$

und

$$F = Q + \frac{r}{R} fN.$$

Man würde hieraus die Kraft F leicht berechnen können, wenn die Größe der Resultante N bekannt wäre und nicht selbst wieder von F abhinge. Man müßte daher, um N zu erfahren, F einstweilen als bekannt voraussetzen, die Kraftrichtungen bis zu ihrem Durchschnittspuncte verlängern, mit Hülfe des Parallelogramms ABCD die Mittelkraft N durch die Kräfte F und Q ausdrücken, den gefundenen Werth in die obige Gleichung einsetzen und diese in Bezug auf die Kraft F auflösen. Allein dies führt auf so zusammengesetzte Ausdrücke und Rechnungen, daß man es vorzieht, folgendes Näherungsverfahren anzuwenden.

Gehen wir zuerst von der Voraussetzung aus, daß der Halbmesser r des Zapfens gegen R sehr klein ist, so wird F nur wenig größer sein, als Q, weil die Reibung gering ist, und wir können die Resultante N hinreichend genau finden, wenn wir bei der Bestimmung ihres Werthes $F = Q$ setzen. Das über den Kraftrichtungen beschriebene Parallelogramm Mach (Fig. 216) wird in diesem Falle ein gleichseitiges, und die Diagonale desselben geht verlängert durch den Mittelpunctt C des Rades. Die Halbmesser AC und BC und die Sehne AB des zwischen den Kraftrichtungen liegenden Bogens sind der Reihe nach senkrecht auf den Seiten Ma, ac oder bM und Mc, das Dreieck Mac ist daher dem Dreiecke ACB ähnlich, woraus $Mc:Ma = AB:AC$ oder da Mc die Resultante N der Kräfte $Ma = Q$ und $Mb = Q$

vorstellt, $N : Q = AB : R$ und

$$N = \frac{AB \cdot Q}{R}$$

Man erhält demnach einen der Mittelkraft N sehr nahen Werth, wenn man den Widerstand Q mit dem Verhältnisse der Sehne des umspannten Bogens zum Halbmesser multiplicirt. Es ist klar, daß dieser Ausdruck die Kraft N etwas kleiner geben wird, als der wahre Werth derselben ist, weil die eine Componente F desselben kleiner angenommen wurde, als sie in der That ist. Da nun schon fN in gewöhnlichen Fällen nicht sehr groß ist im Verhältniß zu den Kräften P und Q, so wird, wenn r gegen R sehr klein ist, der Fehler außerordentlich gering sein. *) Sobald aber das Verhältniß der Halbmesser von Zapfen und Rolle größer wird, darf man sich nicht mehr mit einer solchen Bestimmung begnügen und den mit Hülfe von $N = \frac{AB}{R} \cdot Q$ gefundenen Werth für F nur als einen ersten Näherungswerth betrachten. Wir wollen den Druck $\frac{AB}{R} Q$ deshalb mit N_1 und die daraus folgende Kraft $Q + \frac{r}{R} fN$ mit F_1 bezeichnen und, um einen zweiten Näherungswerth zu finden, die beiden Componenten der

---

*) Um zu zeigen, wie gering der Fehler unter Umständen werden kann, wollen wir den einfachen Fall annehmen, wo die Kräfte parallel wirken, und das Verhältniß der Halbmesser $\frac{r}{R} = \frac{1}{10}$, sowie $f = \frac{1}{8}$; dann ist der wahre Werth der Mittelkraft $F + Q$, und $F = Q + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10}(F + Q) = 1{,}0253\,Q$, während man nach unserer Näherungsmethode $N = 2Q$ und $F = Q + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} \cdot 2Q = 1{,}0250\,Q$ erhalten hätte.

Mittelkraft als unter sich und der eben gefundenen Kraft F_1 gleich betrachten. Dadurch wird jetzt der Zapfendruck $\frac{AB}{R} . F_1 = N_2$ und die bei A erforderliche Kraft $F_2 = Q + \frac{r}{R} f N_2$, welche beide offenbar etwas zu große Werthe geben, weil der Componente Q der etwas größere Werth von F_1 beigelegt wurde. Wir haben demnach jetzt zwei Werthe F_1 und F_2 für die Kraft, von denen der erste sehr wenig kleiner, der andere sehr wenig größer ist, als der wahre, so daß wir diesen dem arithmetischen Mittel aus beiden gleich, also

$$F = \frac{F_1 + F_2}{2} = Q + \frac{r}{R} f \frac{N_1 + N_2}{2}$$

setzen dürfen. *) Unser Verfahren besteht also darin, daß wir als Zapfendruck das Mittel aus zwei Resultanten annehmen, von welchen die eine aus zwei der Last Q gleichen Componenten resultirt und zu einer Kraft F_1 führt, welcher die Componenten der zweiten Resultante gleichgesetzt werden.

2ter Fall. Wenn die beiden Kräfte F und Q nicht in gleichen Abständen von der Drehaxe wirken, sondern die Kraft F (Fig. 217) in der Entfernung $AC = R$, der Widerstand Q in der Entfernung $BC = R_1$ von der Axe C, so bedingt das Gleichgewicht die Gleichheit der Arbeitsgrößen beider Kräfte oder, da die Puncte A und B gleiche Winkelgeschwindigkeit haben, die Gleichheit der Kraftmomente. Man hat daher ohne Rücksicht auf die Reibung $FR = QR_1$ und $F = \frac{R_1}{R} . Q$. Nun soll aber die Kraft F auch noch die

---

*) Wäre in unserm obigen Beispiele $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$ gewesen, so würde der genauere Werth der Kraft $F = 1{,}1333\ Q$, der erste Näherungswerth $F_1 = 1{,}1250\ Q$, der zweite $F_2 = 1{,}1406\ Q$ und $\frac{F_1 + F_2}{2} = 1{,}1328\ Q$ seyn.

Reibung überwinden, es muß daher der durch die Kräfte F und Q erzeugte Druck auf den Zapfen, welcher die Reibung erzeugt, durch den Stützpunct des Zapfens im Lager gehen. Da wir den Angriffspunct dieser Resultante in jedem Puncte ihrer Richtung, welche durch die Mitte des Rades geht, annehmen dürfen, so können wir uns dieselbe im Mittelpuncte des Zapfens selbst angreifend denken und sie hier in zwei den Kräften F und Q parallele, also auch gleiche Componenten zerlegen, kurz wir können die Kräfte F und Q parallel mit sich selbst nach dem Mittelpuncte verlegen, um in der Resultante N derselben den Zapfendruck zu erhalten.

Dann ist $FR = QR_1 + rfN$ und $F = Q.\frac{R_1}{R} + \frac{r}{R}fN$.

Um auch hier wieder annähernd die Resultante N zu finden, sehe man zuerst von der Reibung ab und setze die beiden den Zapfendruck erzeugenden Kräfte einander gleich und $\frac{R_1}{R}Q$, und bezeichne die Resultante derselben mit N_1.

Hieraus erhält man $F_1R = QR_1 + rfN_1$ und $F_1 = \frac{R_1}{R}Q + \frac{r}{R}fN_1$, einen Ausdruck für die Kraft, welcher, wenn der Halbmesser r des Zapfens gegen den Radhalbmesser R sehr klein ist, ein hinreichend genaues Resultat gibt. Wofern dies aber nicht der Fall ist, muß ein zweiter Näherungswerth für den Zapfendruck gesucht werden. Wir sehen aus der vorigen Gleichung, daß F_1 größer ist, als $\frac{R_1}{R}Q$, also Q kleiner als $\frac{R}{R_1}F_1$. Wenn wir daher jetzt beide Componenten des Zapfendrucks $\frac{R}{R_1}F_1$ setzen, so werden wir eine Resultante N_2 erhalten, welche statt zu klein, etwas zu groß ist, ebenso wie die Kraft $F_2 = \frac{R_1}{R}Q + \frac{r}{R}fN_2$.

Wir dürfen deshalb wieder

$$F = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{R_1}{R} Q + \frac{r}{R} f \frac{N_1 + N_2}{2}$$

als hinreichend genau dem wahren Werthe der Kraft entsprechend annehmen.

Das Gewicht G des Rades selbst bewirkt, weil wir uns dasselbe im Mittelpuncte des Rades angreifend denken können, blos eine Vermehrung des Zapfendrucks und mithin der Reibung, welche nicht außer Acht gelassen werden darf, wenn das Gewicht G beträchtlich ist. Man sieht leicht ein, daß man dann an die Stelle von N_1 und N_2 die Resultanten aus N_1 und G und aus N_2 und G zu setzen hat.

125. Gleichgewicht der festen Rolle. — Um blos die Richtung einer geradlinigen Bewegung zu verändern, wendet man häufig die feste Rolle (Fig. 218) an. Diese besteht in einer Kreisscheibe, welche an ihrem Umfange eine Spur zum Einlegen eines Seiles hat, an dessen Enden Kraft und Last angreifen. Die Axe dieser Rolle besteht aus einem eisernen Stifte oder Bolzen, welcher sich mit seinen Enden in den Pfannen einer fest aufgehängten Scheere dreht. Damit bei vorkommenden Seitenverschiebungen der Rolle die Reibung an den Schenkeln der Scheere möglichst herabgezogen wird, stellt man die Seitenflächen der Rolle etwas bauchig her.

Außer dem Widerstande Q hat bei der festen Rolle die Kraft F noch die Steifigkeit des Seiles und die Zapfenreibung zu überwinden. Wenn daher für die Halbmesser von Rolle und Zapfen die Bezeichnungen R und r gelten und N_1 wieder den ersten, durch die Voraussetzung zweier der Last Q gleichen Componenten erhaltenen, Näherungswerth bezeichnet, so ist nach dem Vorigen $F_1 R = Q . R_1 + frN_1$.

Der Steifigkeitswiderstand ist nach §. 120 $\frac{a + bQ}{2R}$,

das Moment desselben $R . \frac{a + bQ}{2R}$, folglich

$F_1 R = QR_1 + frN_1 + \frac{a + bQ}{2R} . R$ und die Kraft

$$F_1 = \frac{R_1}{R} Q + \frac{r}{R} fN_1 + \frac{a + bQ}{2R} .$$

Dieser Werth ist aber, wie wir wissen, zu klein; wir werden ihn daher nur benützen, um uns der Wahrheit noch von einer anderen Seite zu nähern, indem wir die Componenten des Zapfendrucks ihm gleich setzen und ihre Resultante mit N_2 bezeichnen. Der Ausdruck

$F_2 = \frac{R_1}{R} Q + \frac{r}{R} fN_2 + \frac{a + bQ}{2R}$ giebt die Kraft F etwas zu groß an, so daß wieder

$$F = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{R_1}{R} Q + \frac{r}{R} f \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{a + bQ}{2R}$$

gesetzt werden kann.

Bei starken Seilen müssen Kraft und Last in der Mittellinie derselben wirksam gedacht werden und man wird in solchem Falle unter R den um die halbe Seilstärke vermehrten Rollenhalbmesser verstehen. In Bezug auf das eigene Gewicht der Rolle gilt hier dasselbe, was im vorigen Paragraphen bemerkt wurde.

Am gewöhnlichsten ist es, daß die Kräfte F und Q (Fig. 219) parallel sind und zwar vertikal, wie z. B. wenn Wasser im Eimer mit Hülfe des Seils und der festen Rolle aus einem Brunnen gezogen wird. Diese Anordnung läßt eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung zu, weil hier der Druck auf den Zapfen die Resultante paralleler Kräfte also $N = F + Q + G$ oder $N = F + Q - G$ ist, je nachdem Kraft und Last von oben nach unten oder von unten nach oben ziehen. Es wird daher

$F = Q + \frac{r}{R} f (F + Q \pm G) + \frac{a + bQ}{2R}$, eine Gleichung,

aus welcher sich leicht der wahre Werth der Kraft

$$F = \frac{R + fr + \frac{1}{2}b}{R - fr} Q + \frac{\frac{1}{2}a \pm frG}{R - fr}$$

finden läßt.

126. Gleichgewicht der losen Rolle. — Bei der losen Rolle (Fig. 220) ist die Axe einer progressiven Bewegung fähig, indem sie mit ihrem Schnurlauf auf dem Seile ruht, dessen eines Ende **A** an einen festen Haken geknüpft ist, während das andere von der Kraft **F** gezogen wird. Der Widerstand **Q**, welcher fast immer in dem Gewichte einer zu hebenden Last besteht, greift an einem Haken der Scheere an, welche von dem Zapfen der Rolle getragen wird. In dem Seilende, welches bei **A** befestigt ist, rufen die Kräfte **F** und **Q** zusammen eine Spannung **T** hervor, von welcher wir wissen, daß sie der Mittelkraft derselben entgegengesetzt gerichtet und gleich ist. Wenn wir daher die Richtungen von **F** und **T** verlängern, so muß ihr Durchschnittspunct in die Richtung des Widerstandes **Q** fallen, welcher daher in diesem Puncte angreifend gedacht und in zwei Componenten $Ob = T$ und $Oa = F$ zerlegt werden kann. Da die Richtungslinie des Widerstandes **Q** durch den Mittelpunct der Rolle selbst geht, so ist das Parallelogramm **Oadb** gleichseitig, und die Aehnlichkeit der Dreiecke **Obd** und **ACB** giebt, wie in §. 124 $Ob : Od = AC : AB$ oder

$$F = T = \frac{R}{AB} \cdot Q,$$

die Größe der zur Ueberwindung des Widerstandes **Q** erforderlichen Kraft, wenn von der Reibung und Seilesbiegung abgesehen wird. Auf der Seite, wo das Seil sich auf die Rolle wickelt und der Widerstand der Steifigkeit stattfindet, ist die Spannung des Seiles **T**, mithin das Moment dieses Widerstandes $R \frac{a + bT}{2R}$. Die Reibung, erzeugt durch den Druck **Q**, welcher die Zapfen gegen die Scheere preßt, ist **fQ** und ihr Moment **rfQ**. Mit

Rücksicht auf Reibung und Seilesteifigkeit muß daher

$$FR = T.R + \frac{a + bT}{2R} . R + rfQ \text{ sein.}$$

Dieser und der vorige annähernde Ausdruck für T gestatten eine hinreichend genaue Bestimmung der Kraft F. Uebrigens wird es leicht seyn, in jedem besondern Falle das Gewicht G der Rolle selbst und der Scheere, wenn es nöthig wird, mit in Rechnung zu ziehen.

Bei der gewöhnlichsten Anwendung der losen Rolle ist der Widerstand eine zu hebende Last und die Kraft F senkrecht gerichtet. Dann ist $F + T = Q + G$, wenn G das Gewicht der Rolle und Q das der Last nebst der Scheere bezeichnet. Hieraus folgt $T = Q + G - F$,

$$RF = R(Q + G - F) + \frac{a + b(Q + G - F)}{2R} + frQ,$$

und

$$F = \frac{R + fr + \frac{1}{2}b}{2R + \frac{1}{2}b} Q + \frac{\frac{1}{2}a + (R + \frac{1}{2}b) G}{2R + \frac{1}{2}b}.$$

Dürfte man von den Nebenhindernissen absehen, so wäre $a = b = f = o$ und man hätte

$$F = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}G = \frac{Q + G}{2},$$ d. h. die Kraft brauchte nur die Hälfte der Last und des Rollen- und Scheerengewichtes zu betragen.

127. Der Flaschenzug. Eine Vereinigung mehrerer Rollen in einer Scheere oder einem Gehäuse nennt man eine Flasche oder einen Kloben. Zwei solche Kloben auf die Weise mit einander verbunden, daß ein an der einen Flasche befestigtes Seil nach und nach über alle Rollen und zwar abwechselnd von einer Flasche zur andern läuft, bilden einen Flaschenzug (Fig. 221 und 222). Die eine Flasche ist fest aufgehängt, während die andere auf den Seilstücken ruht und die zu hebende Last trägt.

Während das Seilende der Kraft um einen Weg AA, (Fig. 221) fortrückt, wird das übrige Seil zwischen dem

Puncte **A** und dem Befestigungspuncte **B** um die nämliche Länge verkürzt. Diese Verkürzung vertheilt sich natürlich gleichmäßig über die andern Seilstücke, so daß auf jedes derselben nur der n^{te} Theil von AA_1 kommt, wenn **n** die Zahl der Seilstücke mit Ausschluß desjenigen ist, an welchem die Kraft wirkt. Denselben Weg wird auch die bewegliche Flasche mit der Last machen, und da die Arbeitsgrößen von Kraft und Last einander gleich sein, d. h. Kraft und Last sich umgekehrt wie ihre Wege verhalten müssen, so wird ohne Rücksicht auf Reibung und Seilessteifigkeit $F = \frac{1}{n} Q$ seyn. Um diese Widerstände aber mit in Rechnung zu ziehen, wollen wir mit unserer Betrachtung von Rolle zu Rolle gehen und die Spannungen der Seilstücke vom festen Seilende an mit $t_1, t_2, t_3 \ldots$, die Gewichte der zu denselben gehörigen Rollen mit $G_1, G_2, G_3 \ldots$, die um die halbe Seilstärke vermehrten Rollenhalbmesser mit $R_1, R_2, R_3 \ldots$ und die Halbmesser der Zapfen mit $r_1, r_2, r_3 \ldots$ bezeichnen.

Nach §. 126 war $F = T + \frac{a + b'T}{2R} + \frac{r}{R} fQ$ und

$Q = F + T - G$, woraus $F = \frac{R + fr + \frac{1}{2}b}{R - fr} T + \frac{\frac{1}{2}a - frG}{R - fr}$

folgt, eine Gleichung, welche sich nur durch das negative Zeichen des Gewichtes der Rolle, welches hier nicht mit auf den Zapfen drückt, von derjenigen für die Kraft an der festen Rolle §. 125 unterscheidet, wenn man die Spannung **T** als Widerstand betrachtet. Diese beiden Relationen zwischen den Spannungen eines Seiles, welches auf eine lose oder eine feste Rolle gelegt ist, werden wir daher auch benutzen können, um die Spannung t_2 durch t_1, t_3 durch t_2 u. s. f. auszudrücken. Wir erhalten demnach für die erste Rolle, welche eine lose ist,

$$t_2 = \frac{R_1 + fr_1 + \frac{1}{2}b}{R_1 - fr_1} t + \frac{\frac{1}{2}a - fr_1 G_1}{R_1 - fr_1},$$

für die nächstfolgende feste Rolle

$$t_3 = \frac{R_2 + fr_2 + \frac{1}{2}b}{R_2 - fr_2} t_2 + \frac{\frac{1}{2}a + fr_1 G_2}{R_2 - fr_2},$$

für die dritte

$$t_4 = \frac{R_3 + fr_3 + \frac{1}{2}b}{R_3 - fr_3} t_3 + \frac{\frac{1}{2}a - fr_3 G_3}{R_3 - fr_3}$$

u. s. f. bis man endlich auf einen Ausdruck für die Spannung des letzten Seilstücks, an welchem die Kraft wirkt, also auf die Größe der Kraft selbst kommt. Um aber F durch die Spannung des nächstvorhergehenden Seilstücks bestimmen zu können, muß man die Spannung t_1 des ersten Seilstücks kennen. Weil die Seilstücke sämmtlich als parallel angenommen worden sind, hat man ihre Spannungen als die Componenten des Widerstandes Q zu betrachten; es wird daher $t_1 + t_2 + t_3 + .. = Q$, diese Gleichung mit der zwischen F und t_1 zu verbinden und unter Q das Gewicht der zu hebenden Last nebst dem der beweglichen Flasche zu verstehen sein.

Wenn wir voraussetzen dürfen, daß das Gewicht der Rollen sehr gering ist gegen die Last, und bedenken, daß derjenige Theil a der Seilessteifigkeit, welcher nicht von der Spannung abhängt, überhaupt sehr gering ist, so fallen die zweiten Glieder der obigen Gleichungen weg und die Rechnung vereinfacht sich dadurch bedeutend. Noch mehr ist dies der Fall, wenn der Flaschenzug die (Fig. 222) dargestellte Anordnung hat, indem dann die Rollen von gleicher Größe sind und dadurch die Factoren der Spannungen t_1 t_2 u. s. f. in den obigen Gleichungen übereinstimmend werden. Es wird demnach, wenn wir der Kürze wegen mit A diesen für alle Rollen eines solchen Flaschenzugs giltigen Factor $\frac{R + fr + \frac{1}{2}b}{R - fr}$, und mit n die Zahl der Seilstücke, ausschließlich desjenigen, an welchem die Kraft wirkt, bezeichnen

$$t_1 = t_1$$
$$t_2 = At_1$$
$$t_3 = At_2 = A^2 t_1$$
$$t_4 = At_3 = A^3 t_1 \text{ und endlich}$$
$$F = t_n = At_{n-1} = A^n t_1.$$

$$F + (t_1 + t_2 + \ldots . t_{n-1}) = t_1 + A(t_1 + t_2 + \ldots . t_{n-1}).$$

Da aber $t_1 + t_2 + \ldots t_{n-1} = Q$ ist, so folgt hieraus $F + Q = t_1 + AQ$ oder $t_1 = F - (A-1)Q$ und da

$F = A^n t_1$ oder $t_1 = \frac{F}{A^n}$ ist,

$$F - (A-1)Q = \frac{F}{A^n},$$

$$F = \frac{A-1}{1-\frac{1}{A^n}} Q = \frac{A^n(A-1)}{A^n - 1} Q.$$

128. Gleichgewicht der Radwelle. — Eine Kreisscheibe (Fig. 223), ein Rad, mit einem Cylinder von geringerem Durchmesser so verbunden, daß beide einerlei Axe haben, also gewissermaßen eine Verbindung von zwei festen Rollen von ungleicher Größe, nennt man eine Radwelle. An der Peripherie des Rades wirkt eine Kraft, während um die Welle ein Seil geschlungen ist, an welchem der Widerstand wirkt, welcher gewöhnlich in einer zu hebenden Last besteht. Der Zweck dieser Maschine erfordert, daß die Kräfte in Ebenen liegen, welche normal auf die Axe stehen, damit keine Verschiebung derselben in der Axenrichtung entstehen kann. Wie nun auch die Kraft F in dieser Ebene gerichtet sein mag, so wird sie doch immer tangential zu einem Kreise des Rades sein und die Ebene desselben wird die Welle in einem Kreise schneiden, welcher dem gleich ist, an welchem der Widerstand Q (Fig. 224[a]) tangential wirkt. Eine Ebene durch den Angriffspunkt E dieses Widerstandes und durch die Axe der Radwelle gelegt, schneidet jenen Kreis in den Puncten E_1 und E_2. Denken wir uns nun im

Puncte E_1 zwei einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte Q_1 und Q^1, beide gleich und parallel mit Q, so bringen diese sicher keinerlei Veränderung an der Radwelle hervor, weil sie sich gegenseitig aufheben. Wenn wir aber Q mit Q^1 zu einer Mittelkraft $S = Q + Q^1 = 2Q$ verbinden, deren Arbeitsgröße Null ist, weil sie durch die Drehaxe selbst geht, so bleiben uns nur noch zwei Kräfte F und $Q_1 = Q$ übrig, welche sich nun in einer und derselben Ebene, in der des Rades, befinden. Von diesen Kräften F und Q wissen wir aus §. 124, daß, wenn R und R_1 ihre Abstände von der Drehaxe sind, $FR = QR_1$ ist und daß man dieselben mit sich selbst parallel nach dem Mittelpuncte C (Fig. 224) transportiren kann. Es wirken demnach an der Axe der Radwelle drei Kräfte F, Q und $S = 2Q$, welche Zapfendruck und mithin Reibung erzeugen. Aus jeder dieser drei Kräfte entspringen zwei Pressungen, eine am Zapfen A, die andere am Zapfen B, welche sich nach der Lehre von den parallelen Kräften §. 17 u. s. w. d. II. Abth. leicht bestimmen lassen, wenn l die ganze Länge der Welle, l_1 und l_2 die Abstände des Zapfens A von denjenigen Normalebenen zur Axe sind, in welchen Kraft und Last angreifen. Die unter sich und mit der Kraft F selbst parallelen Componenten dieser Kraft sind nämlich

$F_1 = \frac{l - l_1}{l} F$ und $F_2 = \frac{l_1}{l} F$, erstere am Zapfen A, letztere am Zapfen B; die der Kraft Q

$Q_1 = \frac{l - l_2}{l} Q$ und $Q_2 = \frac{l_2}{l} Q$ und die von S

$S_1 = \frac{2l - l_1 - l_2}{2l} S$ und $S_2 = \frac{l_1 + l_2}{2l} S$.

Mit Hülfe des Kräfteparallelogramms kann man nun die Componenten F_1, Q_1, S_1 zu einer Mittelkraft N_1, dem Zapfendrucke in A, und die Kräfte F_2, Q_2, S_2 zu dem Drucke N_2 am Zapfen B vereinigen, daraus die Reibungen fN_1

und fN_1, und wenn r_1 und r_2 die Zapfenhalbmesser bei A und B und ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, die mechanische Arbeit $fN_1 . r_1\omega$ und $fN_2 . r_2\omega$ finden. Dies giebt für das Gleichgewicht der Radwelle

$$F . R\omega = Q . R_1\omega + fN_1 . r_1\omega + fN_2 . r_2\omega \text{ und}$$
$$FR = QR_1 + fN_1r_1 + fN_2r_2 .$$

Gewöhnlich ist $r_1 = r_2$, folglich

$$FR = QR_1 + fr_1 (N_1 + N_2).$$

Wenn l_1 und l_2 wenig von einander verschieden sind d. h. wenn die Normalebenen zur Axe, in welchen Kraft und Last wirken, nicht weit von einander abstehen, dann werden sich die Componenten F_1, Q_1, S_1 nahe zu einander verhalten, wie F_2, Q_2, S_2, und ihre Resultanten N_1 und N_2 werden ziemlich gleiche Richtung haben. Man kann daher in solchem Falle, wie es auch außerdem oft geschieht, $N_1 + N_2$ der Resultante N aller an der Radwelle wirkenden Kräfte gleichsetzen, als ob ein einziger Zapfen da wäre und in einem Puncte desselben die Kräfte F Q, und S wirkten. Es versteht sich, daß unter diese Kräfte auch das Gewicht der Radwelle selbst zu rechnen ist, wenn dasselbe beträchtlich wird.

Die Radwelle kommt übrigens in vielen verschiedenen Gestalten vor; bald wirkt die bewegende Kraft durch Seile, Ketten, Riemen, Zahnkränze u. s. w., bald blos an Kurbeln oder durch die Welle gesteckten Hebeln. Haspel, Göpel, Winden, Treträder, Laufräder u. s. f. sind nichts als Abänderungen dieser einfachen Maschine.

129. Räderwerke. Wenn mehrere auf verschiedenen Axen befindliche Radwellen so mit einander verbunden sind, daß die Bewegung der einen nach gewissen Bedingungen auf eine andere übergetragen wird, so nennt man eine solche Verbindung ein Räderwerk. Die Mittheilung der Bewegung zwischen diesen Radwellen erfolgt entweder durch Seile, Riemen, Ketten oder Schnüre ohne Ende, oder durch die Reibung, welche die blose Berührung der Radkränze bewirkt,

oder auch durch den Eingriff von Zähnen auf den Kränzen. In allen diesen Fällen entstehen durch die Uebertragung der Kräfte von einem Maschinentheil auf den andern Widerstände, deren Einfluß zu kennen oft von Wichtigkeit ist.

130. Widerstände, durch die Spannung der Schnüre und Riemen erzeugt. — Von einer Scheibe oder Trommel (Fig. 225) werde die Bewegung einer andern, ihr parallelen, mit Hülfe eines Riemens ohne Ende mitgetheilt, während die Kraft F und der Widerstand Q tangential an den beiden zu jenen Scheiben gehörigen Wellen wirken. So lange beide Scheiben in Ruhe sind, erfahren beide Theile des Riemens, der obere wie der untere, einerlei Spannung, welche wir als die mittlere mit T_1 bezeichnen wollen. Bei der Bewegung aber wächst die Spannung des ziehenden Riemenstücks, während die des gezogenen abnimmt und zwar so, daß die Summe der beiden Spannungen ebenso groß ist wie während der Ruhe, und t von T_1 um die nämliche Größe K übertroffen wird, wie T_1 von T, woraus $t + K = T - K = T_1$ oder $t = T_1 - K$ und $T = T_1 + K$ folgt. Wenn wir nun weiter bedenken, daß die Differenz T — t der Spannungen T und t es ist, welche die Bewegung auf die zweite Scheibe überträgt und an dieser andrerseits der Widerstand Q wirkt, so können wir, indem wir von der Zapfenreibung absehen und mit R und r die Halbmesser von Rad und Welle an der ersten, mit R_1 und r_1 die an der zweiten Radwelle bezeichnen, annähernd die mechanischen Arbeiten jener beiden Kräfte einander gleich, und wegen der Gleichheit der Winkelgeschwindigkeiten

$$Qr_1 = (T - t) R_1$$

setzen. Nachdem man auf diese Weise ungefähr die Differenz T — t der beiden Spannungen, also auch

$$K = \frac{T - t}{2} = \frac{r_1}{R_1} \frac{Q}{2}$$

gefunden hat, würde man T und t selbst erhalten, wenn die mittlere Spannung T_1 bekannt wäre. Wenn man dann die Resultante der Kräfte

F, T und t mit N, die der Kräfte Q, T und t mit N_1, die Zapfenhalbmesser mit ϱ und mit ϱ_1, die Winkelgeschwindigkeiten der ersten und zweiten Radwelle mit ω und ω_1 bezeichnet, so erhält man, weil die Radumfänge gleiche Geschwindigkeiten haben sollen,

$$R\omega = R_1\omega_1 \text{ und}$$

$(T-t)\,R\omega = F.r\omega + fN.\varrho\omega$ für das treibende Rad, und

$(T-t)\,R_1\omega_1 = Q.r_1\omega_1 + fN_1\varrho_1\omega_1$ für das getriebene Rad, woraus $F = Q.\frac{r_1}{r}\frac{R}{R_1} + fN.\frac{\varrho}{r} + fN_1.\frac{\varrho_1}{r}\frac{R}{R_1}$ folgt.

Wie man, wenn T und t bekannt sind, zur Bestimmung des Zapfendrucks N, welcher selbst wieder von F abhängt, durch ein Näherungsverfahren gelangen kann, ist in den früheren Paragraphen gezeigt worden, und es handelt sich daher nur noch um die mittlere Spannung T_1, welche man zur Berechnung von T und t kennen muß.

Damit der Riemen nicht über die Rolle gleite, wird die Spannung T_1 eine gewisse Größe haben müssen, welche sie nicht übersteigen darf, ohne N und N_1, also ohne die Zapfenreibung, unnöthig zu vergrößern. Man wird daher die Spannungen T und t so einrichten, daß sie von einander blos um die Reibung des Riemens am Umfange der Trommel abweichen, welche, damit die Bewegung wirklich übergetragen werde, also dem Widerstande $Q.\frac{r_1}{R_1}$ gleich sein muß. Nach §. 107 d. II. Abth. verhalten sich die Spannungen eines um eine Walze gelegten Seiles wie $\left(1+\frac{f_1 S}{nR_1}\right)^n : 1$, wenn n die Zahl der Elemente des Bogens S ist, welchen das Seil umspannt, f_1 der Reibungscoefficient und R_1 der Halbmesser der Walze. Wir erhalten daher für unsern Fall

$$\frac{T}{t} = \frac{T_1 + K}{T_1 - K} = \left(1+\frac{f_1 S}{nR_1}\right)^n \text{ und da } K = \frac{r_1}{R_1}.\frac{Q}{2} \text{ war,}$$

$$T_1 = \frac{1 + \left(1 + \frac{f_1 S}{n R_1}\right)^n}{\left(1 + \frac{f_1 S}{n R_1}\right)^n - 1} \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{Q}{2} \text{ *)}$$

Man darf dann T_1 nur etwas größer machen, als dieser Ausdruck angiebt, um der gehörigen Fortpflanzung der Bewegung sicher zu sein.

Bei Riemen ist die Steifigkeit wegen der geringen Dicke unbedeutend genug, um, wie hier geschehen ist, vernachlässigt werden zu können, bei Schnüren und Seilen kann sie dagegen beträchtlicher werden. Immer ist dieser Widerstand der Steifigkeit blos an denjenigen Stellen vorhanden, wo das Seil sich aufwickelt. Wir haben daher die Widerstände $\frac{a + bT}{2R}$ und $\frac{a + bt}{2R}$ an den Puncten d und b mit in Rechnung zu ziehen und die Arbeit der Kraft F um die Arbeitsgrößen derselben zu vermehren.

131. Widerstand der Ketten. — Wenn man sich genöthigt sieht, sehr große oder ungleichmäßig wirkende Kräfte statt durch Riemen und Schnüre, durch Ketten fortzupflanzen, so sind die Gelenke oder Bolzen, durch welche die Glieder der Kette verbunden sind, als Zapfen zu betrachten, welche sich, während die Kette mit dem Rade sich fortbewegt, in ihren Lagern drehen. Wie aus (Fig. 226) ersichtlich ist, haben Rad und Bolzen gleiche Winkelgeschwindigkeit, welche wir für das Rad A (Fig. 225) mit ω und für das Rad B mit ω_1 bezeichnen wollen. Haben daher die Bolzen die Stärke d, so ist der von der Reibung zurückgelegte Weg,

---

*) Der Note des §. 107 zufolge kann man auch

$$T_1 = \frac{1 + 2{,}718\ldots^{\frac{f_1 S}{R_1}}}{2{,}718\ldots^{\frac{f_1 S}{R_1}} - 1} \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{Q}{2} \text{ setzen.}$$

$\frac{d}{2}\omega$ beim ersten und $\frac{d}{2}\omega_1 = \frac{d}{2}\frac{R}{R_1}\omega$, die Reibung selbst aber ist jedesmal proportional der Spannung, also bei jedem Rade ft auf der Seite, wo das Seil mit t Spannung, und fT auf der andern Seite, wo das Seil mit T Spannung gezogen wird. Die Arbeit der Kraft wird daher nächst der des nützlichen Widerstandes auch die Arbeitsgrößen $f(T+t)\frac{d}{2}\omega$ und $f(T+t)\frac{R}{R_1}\frac{d}{2}\omega$ der Kettenreibung zu überwinden haben.

132. Widerstände bei der Mittheilung der Bewegung durch Frictionsscheiben. — Frictionsscheiben theilen sich gegenseitig die Bewegung durch die Reibung mit, welche durch das Andrücken des Kranzes der einen an den der andern entsteht. Um das Gleiten der Kränze zu vermeiden, müssen dieselben einander beständig durch einen äußeren Druck **P** genähert bleiben, indem die eine in ihrem Lager etwas verschiebbare Scheibe durch Gewichte (Fig. 227) Keile, Federn, Druckschrauben und dergleichen gegen die andere angedrückt wird. Zu gleicher Zeit müssen die Kränze rauh sein und es eignet sich besonders, wegen seiner Rauhheit, Büffelleder zum Belegen der Kränze.

Nennen wir **T** die Kraft, welche das Rad **A** auf **B** überträgt, so muß für letzteres die mechanische Arbeit dieser Kraft sowohl derjenigen des Widerstandes, als auch der Arbeit der Zapfenreibung gleich sein, wobei der Zapfendruck die Resultante der nach der Axe transportirten Kräfte T, Q und des äußeren Druckes **P** ist. Am Rade **A** muß die Arbeitsgröße der Kraft **F** gleich derjenigen der Kraft **T**, vermehrt um die Arbeitsgröße der Zapfenreibung sein, welche proportional der Resultante der Kräfte **F**, **T** und **P** ist. Dabei kann die wälzende Reibung der Kränze an einander vernachlässigt werden.

Man trifft die Frictionsscheiben häufig bei den Sackwinden der Mahlmühlen und Getreide-Magazine.

133. Widerstände bei Zahnrädern. — Das bei Weitem allgemeinere Mittel, Bewegungen durch Räderwerk fortzupflanzen, besteht, besonders bei ansehnlichen Kräften, darin, den Kränzen der Räder Zähne zu geben, welche in einander eingreifen. Bei der Bewegung wechseln zwar die Puncte, in welchen sich die Zähne berühren, ihre Abstände von den Aren beider Räder beständig, allein die Zähne werden so geformt, daß die Bewegung die nämliche ist, als ob beide Räder in den mittlern Berührungskreisen, welche man die Theilkreise nennt, auf einander wirkten. Man darf, um die Halbmesser dieser Kreise zu erhalten, nur den Centralabstand CC_1 (Fig. 228) nach dem Verhältniß der Zähnezahlen oder umgekehrt wie die verlangten Winkelgeschwindigkeiten beider Räder theilen. Bezeichnen wir dann mit **T** die Kraft, welche dieselben an ihrem Berührungspuncte **E** auf einander ausüben, so erhalten wir zuerst für die Radwelle, an welcher die Last wirkt, eine Gleichung zwischen den Arbeitsgrößen der Kraft **T** auf der einen nnd der Last **Q** nebst der Reibung am Zapfen C_1 auf der anderen Seite. Für das zweite Rad wird aber die mechanische Arbeit der Kraft **F** nicht allein gleich der Summe der Arbeitsgrößen von **T** und der Reibung am Zapfen **C** sein müssen, sondern sie wird auch noch die Reibung **fT** zwischen den Zähnen zu überwinden haben.

Obschon der Hebelsarm dieser Reibung, weil die Berührungspuncte beständig wechseln, veränderlich ist, so bleibt doch die Arbeitsgröße derselben, wie in der Note zum §. 65 des **II.** Theils nachgewiesen wird, die nämliche, als ob die Reibung am Umfange des Rades **A** mit einem dem Halbmesser **R** desselben gleichen Hebelsarm und einer constanten Intensität $fT\pi\frac{m+m_1}{mm_1} = fT\pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m_1}\right)$ wirkte, wobei **m** und m_1 die Zahlen der Zähne an beiden Rädern ausdrücken.

Man wird daher die Arbeitsgrößen der Widerstände, welche die Kraft F zu überwinden hat, noch um die der Reibung zwischen den Zähnen $fT\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m_1}\right)\pi R\omega$ zu vermehren,

oder auch $T\left[1+\pi f\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m_1}\right)\right]$ anstatt T zu setzen haben.

Diese letztere Kraft ist es auch, welche bei der Berechnung der Reibung am Zapfen C für T in Rechnung gezogen werden muß.

XIV.

Berechnung der Schrauben.

134. Beschreibung der Schraube mit flachem Gewinde. — Um sich einen deutlichen Begriff von der Schraube mit flachem Gewinde zu machen, stelle man sich einen geraden Kreiscylinder (Fig. 229) vor, welcher, während er sich gleichförmig um seine Axe dreht, auch gleichförmig in der Richtung seiner Axe sich fortbewegt. Die krumme Linie, welche dabei irgend ein Punct b der Oberfläche beschreibt, heißt eine Schraubenlinie und besitzt nothwendig die Eigenschaft, daß die Abstände verschiedener Puncte, parallel der Axenrichtung gemessen, als Ordinaten sich wie die zwischen den Projectionen dieser Puncte gegen eine Normalebene zur Axe eingeschlossenen Bögen verhalten, welche die Abscissen vorstellen. Denkt man sich nun ein Rechteck abcd so um die Oberfläche des Cylinders gedreht, daß dasselbe beständig in einer durch die Axe gehenden Ebene mit seiner Seite bc in die Oberfläche des Cylinders fällt, und die Ecke b genau dem Laufe der Schraubenlinie folgt, so entsteht, wenn nur die Windungen der Schraubenlinie weit genug von einander liegen, eine Hervorragung auf dem Cylinder, der sogenannten Spindel, welche man ein Schraubengewinde nennt, und dessen Profil jenes Rechteck ist. Jede einzelne Umwindung, heißt eine Schraubengang, der Abstand zwischen den Enden desselben die Ganghöhe oder Weite des Schraubenganges, deren Maß $bb_1 = aa_1 = cc_1$ ist. Wird die Oberfläche der Spindel in eine Ebene abgewickelt, so verwandeln sich die vorher kreisförmigen Abscissen in gerade Linien und da sie sich wie die ebenfalls geradlinigen Ordinaten, auf welchen sie rechtwinkelig stehen, verhalten, so bildet die Schraubenlinie eines

Ganges auf der abgewickelten Oberfläche eine gerade Linie, die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks **ABC** (Fig. **230**), dessen Grundlinie die Peripherie des Grundkreises der Spindel und dessen Höhe die Ganghöhe ist. Das Schraubengewinde erscheint hiernach als eine um einen Cylinder aufsteigende schiefe Ebene, deren Neigung gegen die Axe durch das Verhältniß der Dreiecksseiten **BC** und **AC** gemessen werden kann. Die Oberfläche eines Gewindes wird gewissermassen aus einer Menge neben einander hinlaufender Schraubenlinien gebildet, welche aber keineswegs gleiche, sondern eine um so stärkere Neigung gegen die Spindelaxe haben, je näher sie sich selbst der Spindel befinden. Denn wenn man sich einige dieser Schraubenlinien abgewickelt denkt, so bleibt die Ganghöhe $BC = B_1C_1 = B_2C_2$ ꝛc. (Fig. **231**) für alle gleich, während die Grundlinien AC, AC_1, AC_2 ꝛc., welche den Umfängen der den Schraubenlinien zugehörigen Grundkreise entsprechen, von innen nach außen immer größer werden.

Zu jeder so geformten Schraube gehört noch ein zweiter Bestandtheil, eine Mutter oder Hohlschraube, welcher mit dem vorigen zusammenwirken muß und ein cylindrisch ausgehöhlter Körper mit vertieften Gewinden im Innern ist, welche genau den erhabenen Gewinden auf der Spindel oder Vollschraube entsprechen.

Die Schrauben sind hinsichtlich der Gestalt ihrer Gewinde verschieden und man unterscheidet solche mit flachen oder rechteckigen und solche mit scharfen oder dreieckigen Gewinden, je nachdem das Profil des Gewindes ein Rechteck oder Dreieck ist. Wenn alle Gänge einer Schraube einem und demselben Gewinde angehören, nennt man sie eine einfache. Liegen aber die Gänge einer einfachen Schraube so weit von einander, daß zwischen denselben noch ein oder mehrere andere Gewinde angebracht sind, so entstehen Schrauben mit doppelten, dreifachen ꝛc. Gewinden.

Bei dem Gebrauche der Schrauben wird bald die Spindel, bald die Mutter in drehende Bewegung gesetzt und die

nothwendige Folge davon ist das Fortschreiten der einen oder der andern in der Richtung der Axe und um einen Weg, welcher für jeden Umgang der Höhe eines Schraubenganges gleich ist. Beide Bewegungen, die drehende und die progressive, können sowohl vereinigt an einem der beiden Theile vorkommen, als auch getrennt, die Drehung an der Spindel, die geradlinige Bewegung an der Mutter und umgekehrt.

135. Gleichgewicht der Schraube mit flachem Gewinde ohne Rücksicht auf die Reibung. — Wenn wir einen der beiden Theile, die Spindel oder die Mutter als vollkommen unbeweglich annehmen, während der andere die Drehbewegung erhält und zugleich progressiv fortrückt, so ist dieser letztere einem völlig freien auf der schiefen Ebene befindlichen Körper zu vergleichen. In beiden Fällen wirkt die Kraft an Hebeln, welche, bei Fig. 232 an dem Kopfe der Spindel angebracht, bei Fig. 233 in Oeffnungen der Mutter eingesetzt werden, und der bewegliche Theil rückt mit der daran angebrachten Last in der Axenrichtung der Schraube fort.

Wird mit **F** die bewegende Kraft, mit **Q** der zu überwindende Widerstand bezeichnet, so ist zuvörderst nothwendig, daß, wie bei der Radwelle, die Kraft in einer zur Drehaxe normalen Ebene liege, damit die Arbeitsgröße der Kraft ganz auf die beabsichtigte Bewegung verwendet werde. Da sich bei der Schraube die Wege der Kraft wie die gleichzeitigen Wege des Widerstandes verhalten, so wird es nur nöthig seyn, irgend zwei zusammengehörige Wege von Kraft und Last der Betrachtung zu unterwerfen und die beiderseitigen Arbeitsgrößen einander gleich zu setzen. Nehmen wir daher der Einfachheit wegen als Weg der Kraft eine Umdrehung an, so hat die Last inzwischen einen der Ganghöhe gleichen Weg gemacht, so daß, wenn **h** diese Höhe und **R** den Abstand der Kraft **F** von der Drehaxe bezeichnet, $F \cdot 2R\pi$ die mechanische Arbeit der Kraft und **Qh** die der Last ist. Abgesehen von der Reibung wird daher bei der Schraube

$$F \cdot 2R\pi = Qh \text{ und } F : Q = h : 2R\pi$$

sein, und die Kraft sich zur Last verhalten, wie die Höhe eines Ganges zum Umfange des von dem Angriffspuncte der Kraft beschriebenen Kreises.

136. Arbeitsgröße der Reibung an der Schraube mit flachem Gewinde. — Wir können, wie gezeigt worden ist, den durch die Schraube zu überwindenden Widerstand (Fig. 232) als eine auf einer schiefen Ebene emporzuhebende Last betrachten und wollen die dazu bestimmte Kraft F_1 als unmittelbar an derjenigen Schraubenlinie wirkend annehmen, deren Neigung mit der der gedachten schiefen Ebene übereinstimmt. Unter allen den verschiedenen Schraubenlinien, welche sich auf der oberen Fläche eines Gewindes verzeichnen lassen, wird es nämlich eine geben, auf welcher wir uns die Last gleichförmig vertheilt denken dürfen und welche wir die mittlere Schraubenlinie nennen wollen. Um den Halbmesser r des Cylinders, welcher diese Schraubenlinie enthält, zu finden, müßte man die Momente der Reibung für die verschiedenen Elemente der Schraubenfläche aufsuchen und ihre Summe durch die Reibung selbst dividiren. In den meisten Fällen der Anwendung aber, wo die Ausladung des Gewindes gegen die Spindelstärke überhaupt nicht beträchtlich ist, wird man hinreichende Genauigkeit erreichen, wenn man als mittlern Halbmesser

r das arithmetische Mittel $\frac{r_1 + r_2}{2}$ aus dem kleinsten

und größten Halbmesser der Schraube nimmt. Stellen wir uns nun den Cylindermantel von diesem Halbmesser auf die Ebene ausgebreitet vor, so bildet für einen Gang die Peripherie $2r\pi$ die Grundlinie und die Höhe h des Schraubenganges die des rechtwinkeligen Dreiecks ABC (Fig. 230) dessen Hypotenuse der Schraubenlinie entspricht, auf welcher die Last Q durch eine horizontal wirkende Kraft F_1 emporgehoben werden soll. Wenn nun die bewegende Kraft F eigentlich am Hebelsarme R wirkt,

während wir für F_1 den Hebelsarm r angenommen haben, so ist zunächst $2rF_1\pi = 2FR\pi$ oder $F_1 r = FR$. Ferner wird nach §. 94. ohne die Reibung die horizontale Kraft F_1 sich zur Last Q verhalten müssen, wie die Höhe des Dreiecks zur Grundlinie, woraus $2r\pi F_1 = Qh$ und in Verbindung mit der vorigen Gleichung $2R\pi F = Qh$ folgt. Wir erhalten also, wenn wir die Schraube als schiefe Ebene betrachten, ganz dasselbe Resultat wie im vorigen Paragraphen und werden in einer solchen Betrachtungsweise leicht den Weg zur Bestimmung der Reibung finden. Wir wissen nämlich aus §. 104. d. II. Abth., daß bei der schiefen Ebene die Kraft, wenn sie horizontal wirkt und die Reibung berücksichtigt wird, $\frac{BC + fAC}{AC - fBC} Q$ sein muß, und da für unsern Fall BC der Ganghöhe h und AC dem Umfange $2r\pi$ entspricht,

$$F_1 = \frac{h + 2r\pi f}{2r\pi - fh} . Q \text{ oder}$$

$$2r\pi F_1 = 2R\pi F = \frac{h + 2r\pi f}{1 - \frac{fh}{2r\pi}} . Q$$

$$= Qh + fQ \frac{h^2 + 4r^2\pi^2}{2r\pi - fh},$$ wobei das letzte Glied der Gleichung die Arbeitsgröße der Reibung ausdrückt.

137. Dimensionsverhältnisse an den Schrauben und Einfluß der Reibung. — Zwar wachsen Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{h^2 + 4r^2\pi^2}{2r\pi - fh}$ mit dem Halbmesser r der mittlern Schraubenlinie, jedoch der Zähler ungleich mehr als der Nenner; es wird daher viel auf diesen Halbmesser ankommen und er wird so gering sein müssen, als es sich nur mit der erforderlichen Festigkeit der Spindel verträgt. Ist bO (Fig. 234) der kleinste, aO der größte

Halbmesser der Schraube, so giebt man gewöhulich dem Profile des Gewindes die Gestalt eines Quadrates, so daß Vorsprung ab und Dicke ad des Gewindes einander gleich sind, und da es für die Herstellung der Schraube am bequemsten ist, die Gewinde der Voll- und Hohlschraube ganz gleich zu machen, so ist auch der Querschnitt des Zwischenraums abc_1d_1 ein Quadrat und $ab = bc_1$. Hat man demnach eine einfache Schraube, so ist Ganghöhe $aa_1 = bb_1 = 2ad = 2ab$ und die Ausladung der halben Ganghöhe gleich. Bei doppeltem Gewinde ist die Ganghöhe a_1a_2 dem vierfachen Vorsprunge ab gleich u. s. f., und man sieht daraus, daß man durch mehrfache Gewinde die Steigung vergrößern kann, ohne die übrigen Verhältnisse zwischen der Spindelstärke und der Breite und Dicke der Gewinde zu verändern.

Schrauben mit flachen Gewinden werden gewöhnlich aus Schmiedeeisen gefertigt, die Muttern aus Kupfer, Messing oder Rothguß. Die Stärke der Spindel muß von der Art sein, daß sie unter dem Drucke Q, welcher parallel der Axe wirkt, keine Formveränderung erleidet. Da nun die Bruchfläche $\overline{bO}^2 \pi$ sein würde und jedes Quadratmillimeter mit Sicherheit ungefähr 6 Kil. tragen kann, so wird $6 . \overline{bO}^2 . \pi = Q$ sein müssen, woraus sich der Halbmesser bO der Spindel zu

$$bO = \sqrt{\frac{Q}{6\pi}} = 0{,}2511 \sqrt{Q}$$ *) Millim. ergiebt.

Die Mutter muß wenigstens drei Gänge umfassen, wenn ihr Eingriff mit der Spindel recht vollkommen sein und die Abnutzung nicht zu schnell vor sich gehen soll. Die Gesammtdicke dieser drei Gänge wird daher $3ad = 3ab$ und die Bruchfläche der Gewinde an der Spindel $2\pi . \overline{bO}\, 3ab$ betragen. Dabei haben wir angenommen, daß der Druck an der mitt-

*) In §. 74 d. II. Theiles wird gezeigt, wie für andere Maß- und Gewichts-Systeme die Reduction vorzunehmen ist.

lern Schraubenlinie wirke. Möglicherweise aber kann derselbe auch ganz auf den äußern Umfang aa, treffen und somit in Bezug auf das Abbrechen der Gewinde einen doppelt so großen Hebelsarm haben, als in jenem Falle; deshalb wollen wir der Sicherheit wegen die Bruchfläche nur $3 . ab . \overline{bO} . \pi$ setzen. Vorausgesetzt, daß das Material der Mutter die nämliche Widerstandsfähigkeit besitzt, wie das der Spindel, erlangt man allenthalben gleiche Festigkeit, wenn man $\overline{bO}^2 \pi = 3 . ab . \overline{bO} . \pi$ oder den Vorsprung $ab = \frac{\overline{bO}}{3}$ nimmt.

Wenn wir uns nach diesen Verhältnissen, welche für die obigen Annahmen als die passendsten erscheinen, eine Schraube construirt denken, so wird $\overline{bO} = r_1 = 3ab$, $\overline{aO} = r_2 = 4ab$ und der Halbmesser der mittlern Schraubenlinie $r = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{7}{2} ab = \frac{7}{4} h$, daher die von der Reibung in Anspruch genommene Arbeitsgröße

$fQ . \frac{h^2 + 4r^2\pi^2}{2r\pi - fh} = \frac{122 f}{11 - f} . Qh$, und wenn der Reibungscoefficient zwischen der schmiedeeisernen Spindel und bronzenen Mutter 0,17 beträgt $\frac{122 f}{11 - f} Qh = 1{,}92\ Qh$.

Die mechanische Arbeit würde ohne die Reibung Qh sein; sie beträgt also mit der Reibung $Qh + 1{,}92\ Qh = 2{,}92\ Qh$ und der Verlust durch die Reibung beinahe das Doppelte der nützlichen Arbeitsgröße.

138. Reibung am Fußlager der Spindel oder der Mutter. — Wir haben bei den Schrauben in (Fig. 232 und 233) jedesmal den einen Theil als fest, den andern zugleich in drehender und progressiver Bewegung vorausgesetzt und hatten dabei weiter keine Reibung als am Gewinde. Häufig kommmt es aber auch vor, daß die Schraubenspindel nur eine drehende Bewegung hat, während die

Mutter fortschreitet, oder daß sich die Mutter blos dreht und die Spindel fortrückt.

Die erste Anordnung (Fig. 235) findet sich besonders an den Führungsschrauben, seltener bei Pressen und in diesem Falle bei solchen mit zwei Spindeln (Fig. 236), weil eine einzige Spindel in der Mitte dem zu pressenden Gegenstande im Wege sein würde. Die Schraubenspindel muß bei dieser Anordnung immer an beiden Enden drehbar unterstützt sein, indem sie z. B. unten in einem Fußlager läuft, unter dem Kopfe aber eine kreisförmige Spur hat, mit welcher sie sich in einem Halsringe drehen kann, ohne sich in der Axenrichtung zu bewegen. Der Druck des Zapfens auf das Fußlager ist dem Widerstande Q gleich und der mittlere Hebelsarm der dadurch erzeugten Reibung fQ ist $\frac{2}{3}\varrho$, wenn ϱ der Halbmesser des Zapfens ist. Während einer Umdrehung ist daher $2\pi . \frac{2}{3}\varrho . fQ$ die Arbeitsgröße der Reibung und die Totalarbeit der Kraft F

$$2R\pi . F = Qh + fQ \frac{h^2 + 4r^2\pi^2}{2r\pi - fh} + \frac{2}{3} . 2\pi\varrho . fQ.$$

Wenn dagegen die Mutter sich um die Spindel dreht und die Spindel, die Last nachziehend, die progressive Bewegung macht (Fig. 237), so kommt zu der Reibung an den Gewinden die der Mutter auf ihrer festen Unterlage. Man läßt die Mutter mit einem Ringe in einem kreisförmigen Canale der Unterlage laufen, an welchem eine Reibung fQ an einem dem mittlern Hebelsarm ϱ_1 des Ringes gleichen mittlern Hebelsarme wirkt. Es ist daher in diesem Falle den Arbeitsgrößen der übrigen Widerstände diejenige dieser Reibung $2\varrho . \pi fQ$ hinzuzufügen. Man sieht leicht ein, daß der Hebelsarm ϱ_1 derselben im Verhältniß zu dem der Kraft ziemlich beträchtlich sein wird und somit auch die dadurch verlorne Arbeitsgröße. Wäre z. B. $Q = 3000$ Kil. $f = \frac{1}{10}$ und $\varrho = 0{,}5$ met., so würde das Moment dieser Reibung $\frac{1}{10} . 3000 . 0{,}5 = 150$ betragen, und man bedürfte blos wegen dieses Widerstandes an dem Hebelsarme der

Kraft, wenn dieser 1,5 met. beträgt, um 100 Kil. Kraft mehr, als ohne denselben. Man muß daher durch Schmieren und Einölen des ringförmigen Canals oder dadurch, daß man den Ring der Mutter auf Rollen laufen läßt und die gleitende Reibung in Zapfenreibung verwandelt, die Reibung möglichst herabziehen. Freilich laufen sich die Rollen leicht ungleich ab, und die bessere Anordnung bleibt immer die, wo die Spindeln auf Fußlagern laufen, wie in (Fig. 235 und 236.)

Die verschiedenen Arten der Schraubenpressen, Durchschnitte, Prägwerke u. s. w. bieten Beispiele für jede der vier verschiedenen Anordnungen zwischen Spindel und Mutter.

139. Schrauben mit scharfen Gewinden. — Scharfe Gewinde (Fig. 238) einer Schraube kann man sich ganz so entstanden denken, wie flache, wenn man an die Stelle des Rechtecks abcd (Fig. 239) ein gleichschenkliches Dreieck abc setzt, dessen Basis bc sich an dem Umfang der Spindel anlegt. Man sieht leicht ein, daß bei einer solchen Schraube der Druck, welcher die Reibung erzeugt, nicht mehr blos von der Steigung des Gewindes, sondern auch von der Neigung zwischen den Seiten ab und ac des Gewindeprofils abhängen wird.

Wenn an einer schiefen Ebene horizontal die Kraft F_1 und vertikal die Last Q wirkt, so erhält man nach §. 104 d. II. Abth. in der Richtung der schiefen Ebene die Kraft $P = F_1 AC - Q.BC$ und einen Normaldruck, welchen man durch $N = F_1 F.BC + Q.AC$ ausdrücken kann, so daß $F_1.AC - Q.BC = f(F_1.BC + Q.AC)$ oder $P = fN$ ist. Es stelle nun das Dreieck abc (Fig. 239) das Profil eines scharfen Schraubengewindes dar, welches sich in der durch die Axe der Spindel gehenden Bildebene selbst befindet, und pq sei die Projection einer dem Normaldrucke N proportionalen Linie gegen diese Ebene. Die Neigung eines Schraubengewindes ist nun in der Regel so gering, daß wir hier ohne erheblichen Fehler den Druck N als in der Bildebene selbst liegend annehmen und mit seiner Projection pq ver-

wechseln dürfen. Zerlegt man nun den Druck N in zwei Componenten, qr senkrecht gegen die Seite ab des Profils und rp = qs horizontal, so ist die erstere der Druck, welcher die Reibung am scharfen Gewinde erzeugt, während die andere, welche in den Radius der Schraube fällt, durch eine ihr gleiche Componente an der andern Seite der Schraube aufgehoben wird. Die Seiten der Dreiecke pqr und abd stehen der Reihe nach normal auf einander, diese Dreiecke sind daher ähnlich und man erhält

$$qr : pq = ab : ad \text{ oder } qr : N = ab : ad$$

$qr = N . \frac{ab}{ad} = \frac{N}{m}$, wenn man das Verhältniß der Höhe ad des Profils zur Seite ab mit m bezeichnet. Man hat daher in die obige Gleichung $f\frac{N}{m}$ für fN zu setzen und erhält

$$F_1 . AC - Q . BC = \frac{f}{m}(F_1 BC + Q . AC) \text{ oder}$$

$$F_1 (AC . m - f . BC) = Q (BC . m + f . AC), \text{ folglich}$$

die Arbeitsgröße $2r\pi F_1 = 2R\pi F = 2r\pi Q \frac{BC . m + fAC}{AC . m - fBC}$

Für die Schraube ist nun $BC = h$ und $AC = 2r\pi$, folglich

$2R\pi . F = Q . \frac{hm + 2r\pi f}{2r\pi m - fh} = Qh + Qf \frac{h^2 + 4r^2\pi^2}{2r\pi m - fh}$, wofür man, da $2r\pi m - fh$ sich wenig von $2r\pi m - fhm$ unterscheiden wird, auch

$$2R\pi F = Qh + \frac{f}{m} Q \frac{h^2 + 4r^2\pi^2}{2r\pi - fh}$$

schreiben kann.

Da die Reibung mit dem Wachsen von m abnimmt, so wird dieselbe bei stark vorspringenden Gewinden geringer sein, als bei minder tiefen, immer aber größer als bei flachen Gewinden, weil m kleiner ist als Eins. Mehrgängige scharfe Schrauben werden daher bei gleichem Vorsprunge der Gewinde und sonst

gleichen Verhältnissen weniger Reibung verursachen, als einfache. Schrauben von Holz stellt man stets scharfgängig her. Bei nicht sehr dichtem Holze, wie Eiche, Ulme u. s. w. nimmt man als Profil der Gewinde ein rechtwinkelig gleichschenkliches Dreieck, bei dichtem Holze, wie Buchsbaum, Weißbuche u. s. f. ein gleichseitiges Dreieck, welches man auch bei eisernen Spindeln wählt. Die Ganghöhe ist natürlich jedesmal der Grundlinie $bc = aa_1$ (Fig. 238) des Dreiecks gleich für eine einfache Schraube, doppelt so groß für eine doppelte u. s. f. Scharfe Gewinde haben daher vor flachen den Vorzug, daß sie bei gleicher Ganghöhe doppelt so viel Bruchfläche darbieten, als diese, und daß man, ohne die Festigkeit des einzelnen Gewindes zu vermindern, doppelt so viel scharfe Gewinde auf gleicher Länge der Spindel anbringen kann, als flache, wodurch man immer ein vollkommneres Ineinandergreifen von Mutter und Spindel erreicht. Der Vorsprung des Gewindes ist $\frac{1}{6}$ der Spindelstärke, welche man wie in §. 137 bestimmen kann, wenn man die Belastung für jedes Quadratmillimeter bei Holz 0,8 Kil. setzt. Für Gewinde z. B. von gleichseitig dreieckigem Querschnitte ist

$$ad = \sqrt{\overline{ab}^2 - \overline{bd}^2} = \sqrt{h^2 - \frac{h^2}{4}} = \frac{h}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\,h,$$

der Halbmesser der mittlern Schraubenlinie $\frac{7}{2}\,ad = 3{,}031\,h$

und $m = \frac{ad}{ab} = \frac{0{,}866\,h}{h} = 0{,}866$. Nehmen wir dann wieder $f = 0{,}17$, so erhalten wir die mechanische Arbeit der Reibung $\frac{0{,}17\,[1 + 4\,(3{,}031\,\pi)^2]}{0{,}866 \,.\, 2 \,.\, 3{,}031\,\pi - 0{,}17}\,.\,Qh = 3{,}79\;Qh$, und die Arbeitsgröße der Kraft F

$2R\pi F = Qh + 3{,}79\;Qh = 4{,}79\,Qh$, also beiläufig $4\frac{4}{5}$ mal so groß, als sie ohne Reibung zu sein brauchte.

Bei sehr feinen schmiedeeisernen und stählernen Schrauben wendet man die obigen Constructionsverhältnisse nicht

an, sondern sucht die Reibung auf eine größere Fläche zu vertheilen, um die Abnutzung geringer und das Ineinandergreifen von Spindel und Mutter vollkommner zu machen. Man giebt zu dem Behufe dem Vorsprunge der Gewinde die zwei bis dreifache Ganghöhe. Sehr scharfe Gewinde findet man an den sogenannten Holzschrauben (Fig. 240), welche aus Eisen gefertigt, zur Verbindung des Holzes oder Eisens mit dem Holze dienen. Die Gewinde werden sehr dünn, tief und scharf gemacht, damit sie im Holze, in welchem nur ein Loch von der Spindelstärke ausgebohrt ist, sich selbst beim Einschrauben ihre Muttergewinde bilden; große Zwischenräume aber giebt man den Gewinden, damit die Gewinde des Holzes wegen der geringeren Festigkeit des Materials größere Dicke erhalten.

140. Einige besondere, bei den Schrauben vorkommende Fälle. — Wenn es blos gilt, durch die an der Schraube wirksame Kraft **F** die Last **Q** vor dem Herabgleiten zu sichern, so wird natürlich die Reibung mit zur Erhaltung des Gleichgewichts beitragen, und man darf nur **f** negativ setzen, um die erforderliche Kraft **F** zu finden. Es ist nämlich alsdann für flache Gewinde

$$F = \frac{1}{2R\pi}\left\{Qh - fQ\,\frac{h^2 + 4r^2\pi^2}{2r\pi + fh}\right\}$$ und für die scharfen

$$F = \frac{1}{2R\pi}\left\{Qh - \frac{f}{m}\,Q\,\frac{h^2+4r^2\pi^2}{2r\pi + fh}\right\}$$

für $f = \frac{h}{2r\pi}$ wird im ersten Falle und für $\frac{f}{m} = \frac{h}{2r\pi}$ im zweiten Falle die Kraft **F** Null. So lange also das Verhältniß **h** und $2r\pi$ der Dreiecksseiten, welche die Neigung des Gewindes ausdrücken, bei flachen Gewinden kleiner ist als der Reibungscoefficient **f**, oder bei scharfen Gewinden kleiner als $\frac{f}{m}$, ist der Widerstand **Q** nicht im Stande, die Schraube selbst zu lösen, und die Reibung allein hinreichend,

die Schraube am Zurückgehen zu verhindern. Auf diese Eigenschaft der Schrauben gründet sich ihre Anwendung als Verbindungsmittel von Maschinenbestandtheilen, wovon die Schraubenbolzen ein Beispiel geben. Bei allen Verbindungsschrauben wird man daher scharfe und sehr wenig ansteigende, folglich auch einfache Gewinde anbringen. Wenn dennoch durch Erschütterungen der vereinigten Bestandtheile die Muttern lose werden, so sucht man eine sehr vermehrte Reibung dadurch hervorzubringen, daß man auf die Mutter eine zweite ihr ganz gleiche, die sogenannte Gegenmutter, aufschraubt, während jene festgehalten wird, so daß beide Muttern einander nach entgegengesetzten Seiten gegen die Gewinde der Spindel drängen. In andern Fällen ist die Eigenschaft der Schrauben, von selbst unter der Wirkung des Widerstandes zurückzugehen, nachdem die Kraft aufgehört hat zu wirken, willkommen. Dies ist namentlich der Fall bei Prägwerken, Buchdruckerpressen, Papierpressen u. s. f. bei welchen man durch die Rückwirkung, welche der augenblicklich stark zusammengepreßte Gegenstand durch seine Elasticität ausübt, das Zurückgehen der Schraube bewirken oder doch erleichtern will. Schrauben von dieser Bestimmung erhalten daher immer stark ansteigende, und damit ein einfaches Gewinde bei beträchtlicher Ganghöhe nicht übermäßig breit wird, mehrfache Gewinde. Dadurch erreicht man zugleich einen andern für jene Maschinen nicht minder wichtigen Zweck, nämlich den, daß die progressive Bewegung zur drehenden in ein der Schnelligkeit, mit welcher operirt werden soll, entsprechendes Verhältniß tritt.

141. Die Schraube ohne Ende. — Eine Schraube (Fig. 241), deren Gewinde anstatt mit den Gewinden einer Mutter, mit den Zähnen eines Zahnrades so in Eingriff sind, daß, wenn die Schraube sich ohne progressive Bewegung dreht, beständig neue Zähne zwischen die Gewinde treten und das Rad dadurch in drehende Bewegung versetzt wird, heißt eine Schraube ohne Ende. Die gegenseitige Lage von Schraube und Rad ist von der Art,

daß die mittlere Ebene des Rades durch die Axe der Schraube geht, welche wir uns hier vertikal vorstellen wollen. Die Radzähne werden natürlich, um die Schraubengewinde nicht blos in einem Puncte, sondern ihrer ganzen Breite nach zu berühren, schief gegen die Stirnfläche des Rades stehen und eigentlich einer Schraubenlinie folgen müssen, welche durch den Berührungspunkt zwischen Zahn und Gewinde geht und mit dem letztern gleiche Axe und gleiche Neigung hat. Die Kraft **F** wirkt an einer Kurbel oder auf andere Weise an der Schraubenspindel, während wir uns den Widerstand als eine Last Q_1, welche an einem um die Radwelle geschlungenen Seile gehoben werden soll, denken wollen. Wenn wir die Gewinde flach annehmen, so schneidet die mittlere durch die Spindelaxe gehende Radebene die reibende Fläche des Gewindes in einer gegen die Axe normalen Linie **mb** (Fig. **242**) und den Cylindermantel der durch den Berührungspunct gehenden Schraubenlinie in einer geraden, zur Axe parallelen Linie **AB**, so daß der Eingriff wie der einer vertikalen Zahnstange mit ebenen Zähnen in ein gewöhnliches Zahnrad erfolgt. In der Linie **AB**, welche für alle Berührungspuncte zwischen den Zähnen und Gewinden Tangente des Theilkreises ist, können wir uns daher einen Druck **Q** denken, durch welchen die Schraube die Umdrehung des Rades bewirkt.

Bezeichne **r** den Hebelsarm der Last **Q**, **R** den Halbmesser vom Theilkreise des Rades, **N** den Zapfendruck oder die Resultante der nach der Radaxe transportirten Kräfte Q_1, **Q** und des Gewichtes der Radwelle, endlich ϱ den Zapfenhalbmesser, so ist für das Gleichgewicht des Rades

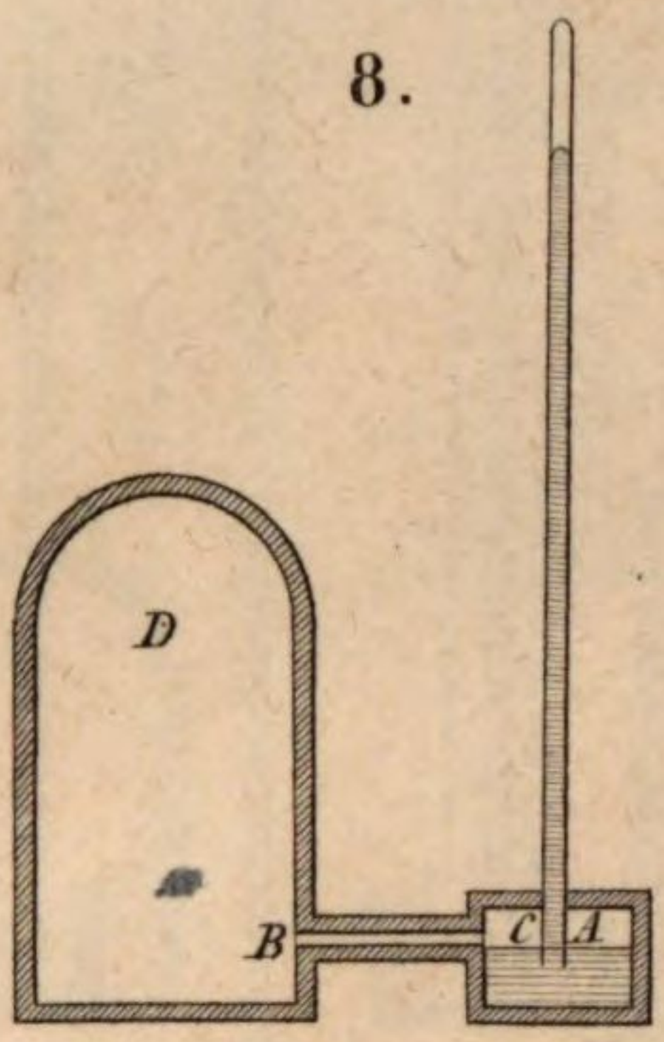
$$QR = Q_1 r + f \varrho N ,$$

woraus man nach §. 124 den Werth von **Q** finden kann. Nun ist aber die Reibung zwischen den Zähnen und den Gewinden auch in Rechnung zu bringen; sie ist dem Drucke **Q** proportional und kann nach §. 136 berechnet werden. Da jedoch der Hebelsarm dieser Reibung veränderlich ist, indem beständig andere Puncte der Zähne mit den Gewinden in

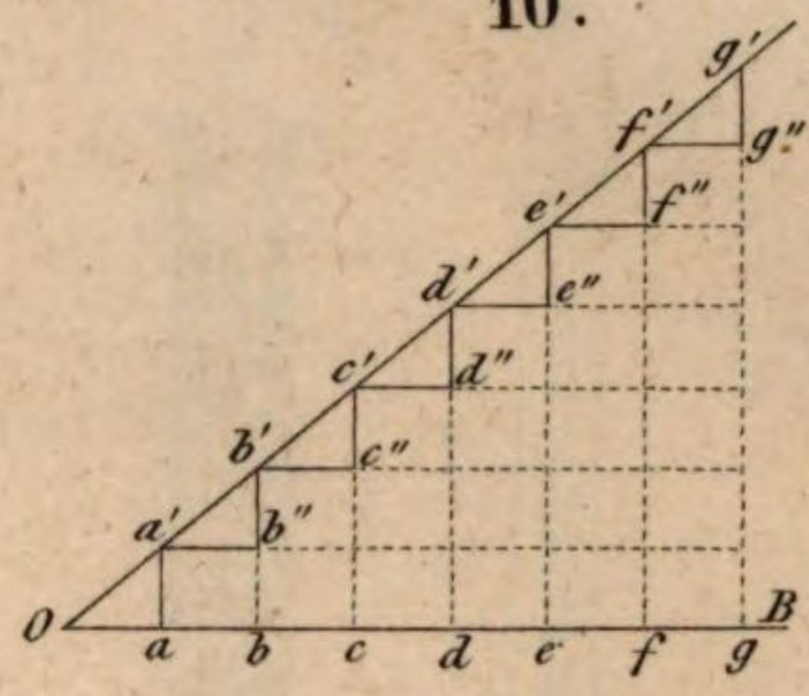
Berührung kommen, so kann man wie im §. 133 den Hebelsarm des Theilkreises als mittlern Hebelsarm und

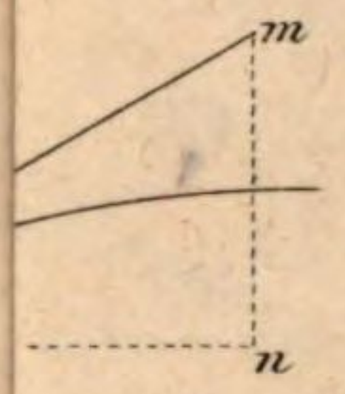
$f Q \pi \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}\right)$ als constante Intensität der Reibung an den Zähnen betrachten und den von der Schraube zu überwindenden Widerstand $Q \left\{1 + f\pi \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}\right)\right\}$ setzen, wo m und m_1 die Zahlen der Zähne an dem Rade und an der als Zahnstange gedachten Schraube bezeichnen. Eine Zahnstange ist aber als ein Rad von unendlich großem Halbmesser und mit unendlich vielen Zähnen anzusehen, so daß $\frac{1}{m_1}$ so gut wie Null, und $Q \left\{1 + f\pi \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}\right)\right\} = Q\left(1 + \frac{f\pi}{m}\right)$ wird. Wenn man diesen Werth für die Belastung in die Ausdrücke der §§. 136 und 138 einführt, erhält man die an der Schraube erforderliche Arbeitsgröße. Man sieht hieraus, daß bei der Schraube ohne Ende ein sehr beträchtlicher Verlust an mechanischer Arbeit durch die Reibung verursacht wird. Schon die Reibung an den Gewinden und Zapfen der Schraube nimmt, wie §. 137 nachweist, zwei Drittel der Arbeitsgröße der Kraft in Anspruch. Wenn nun das übrig bleibende Drittel noch die Reibung an den Zähnen und den Zapfen des Rades zu überwinden hat, so kann nur ein kleiner Theil der ursprünglichen Arbeitsgröße der Kraft F auf den nützlichen Effect der Vorrichtung kommen.

8.

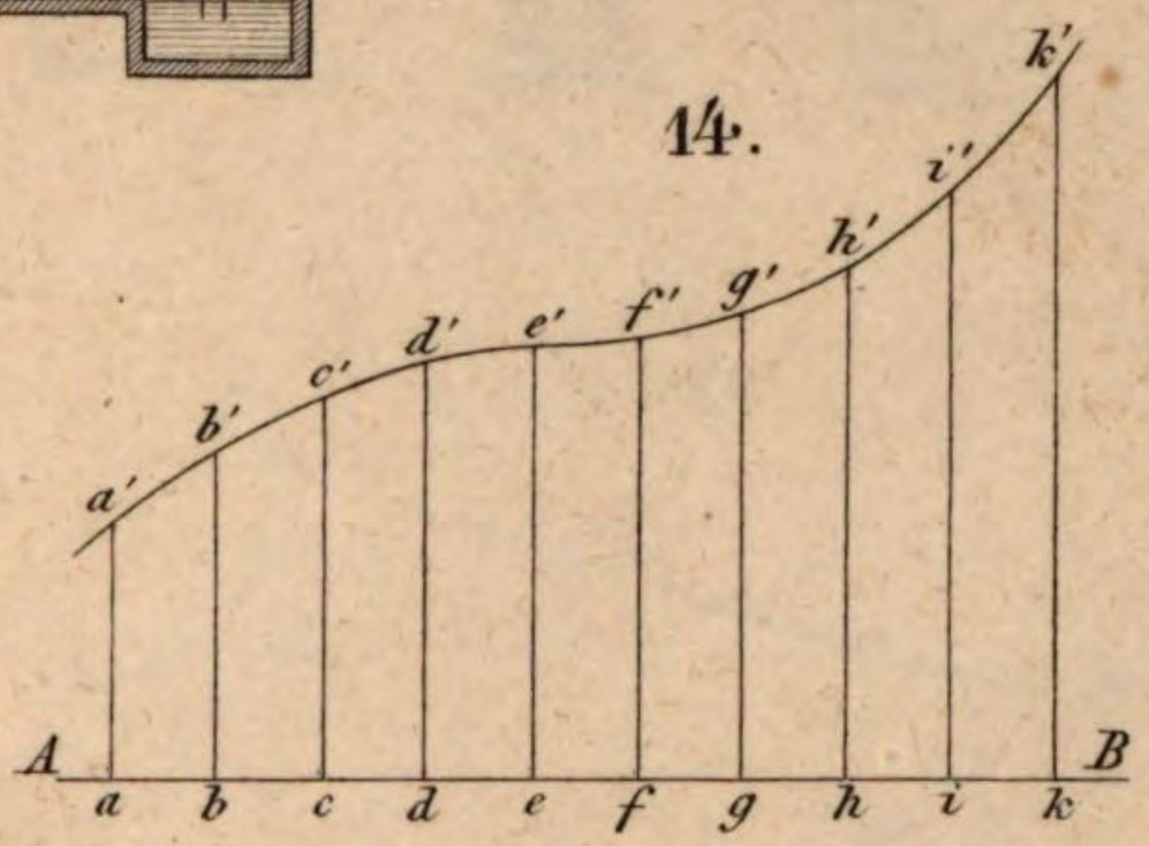


10.

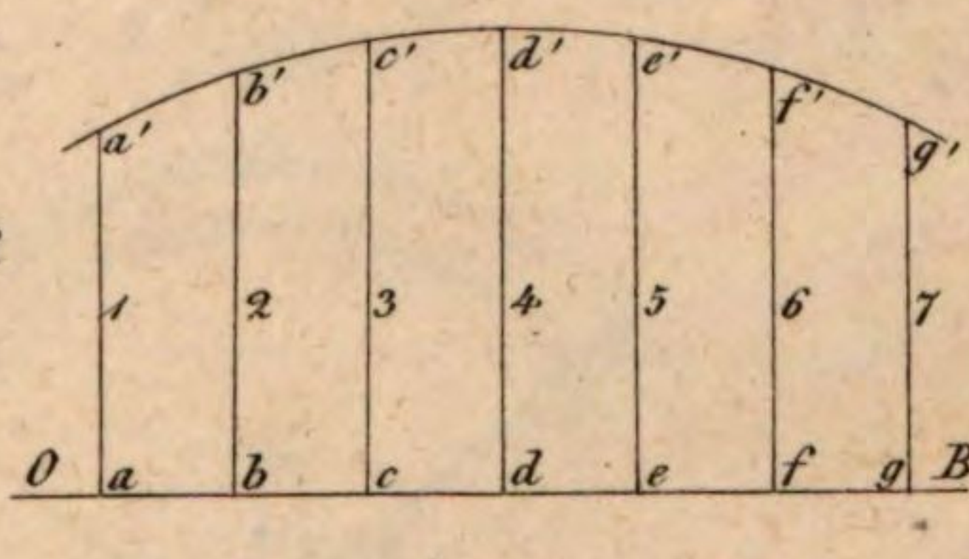




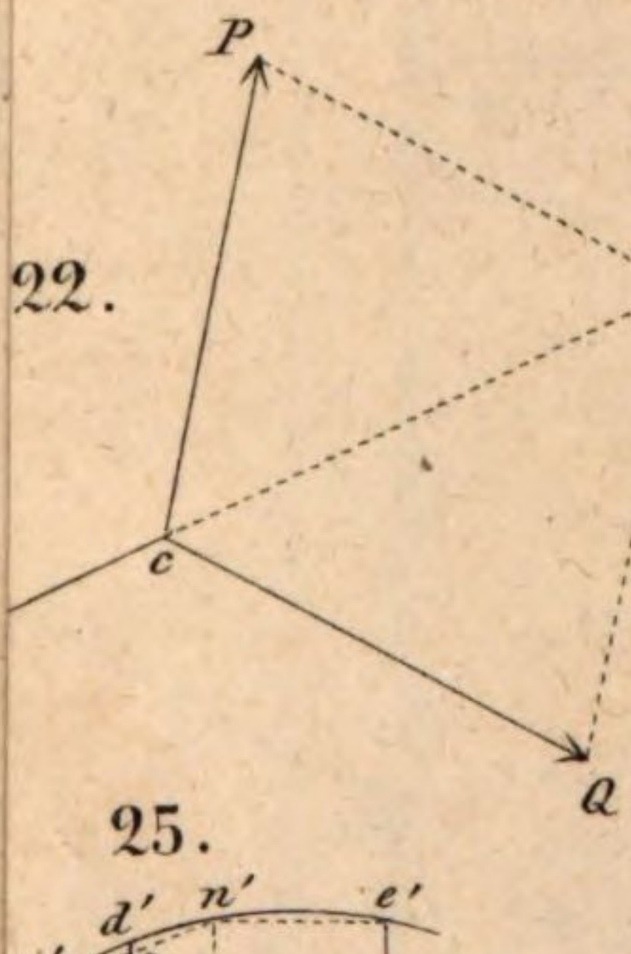
14.



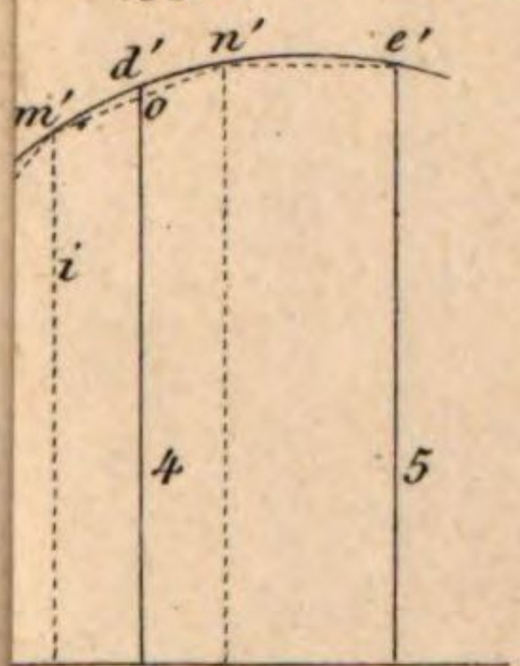
24.



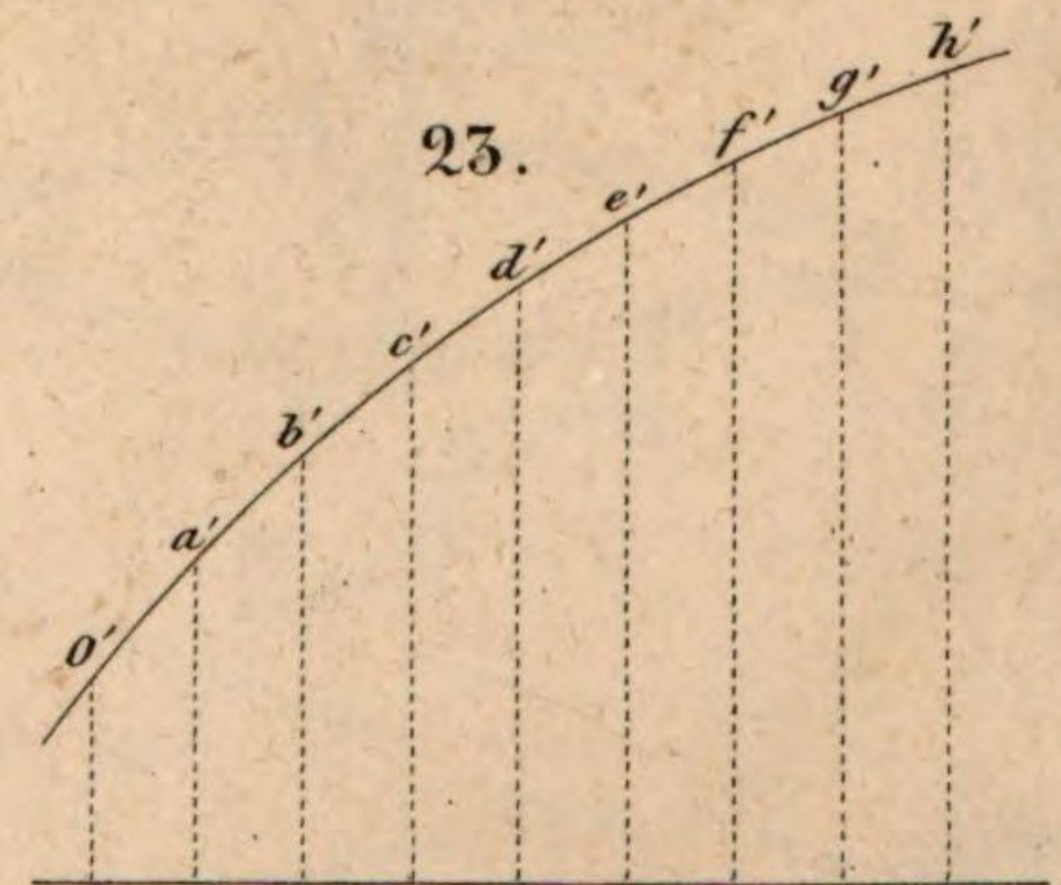
22.



25.

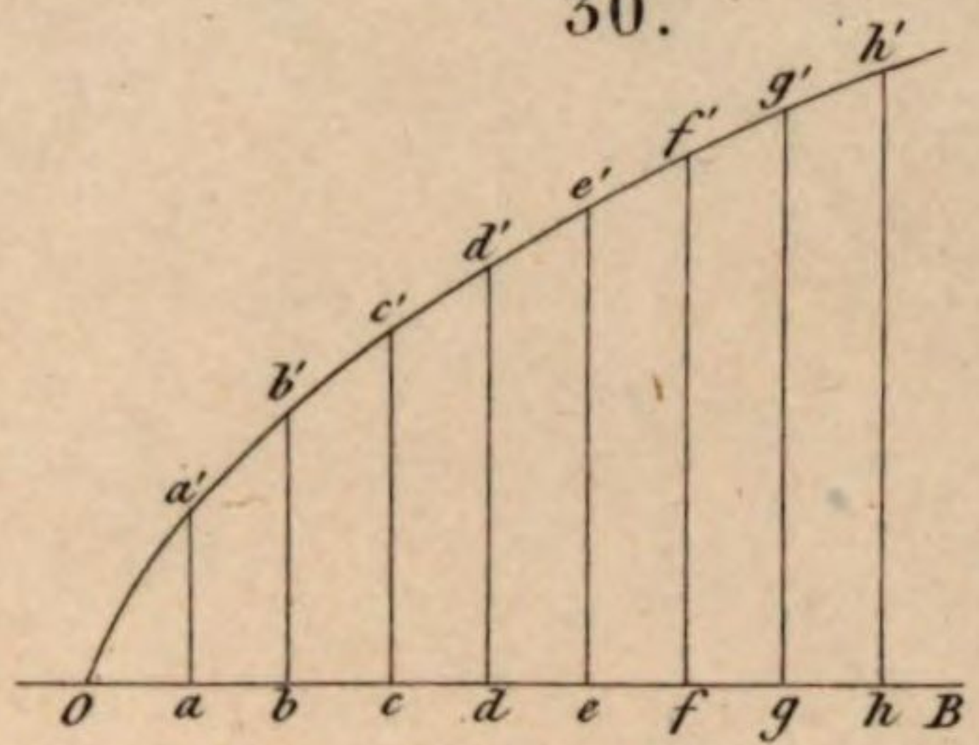


23.

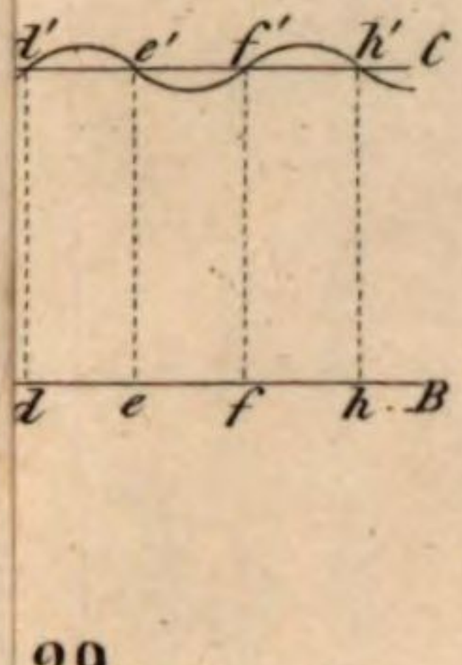


J.A.Bühler sc. Nürnb.

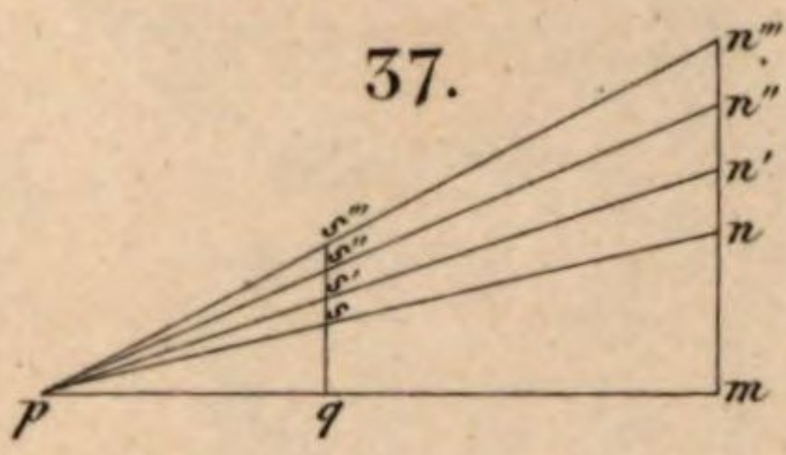
30.

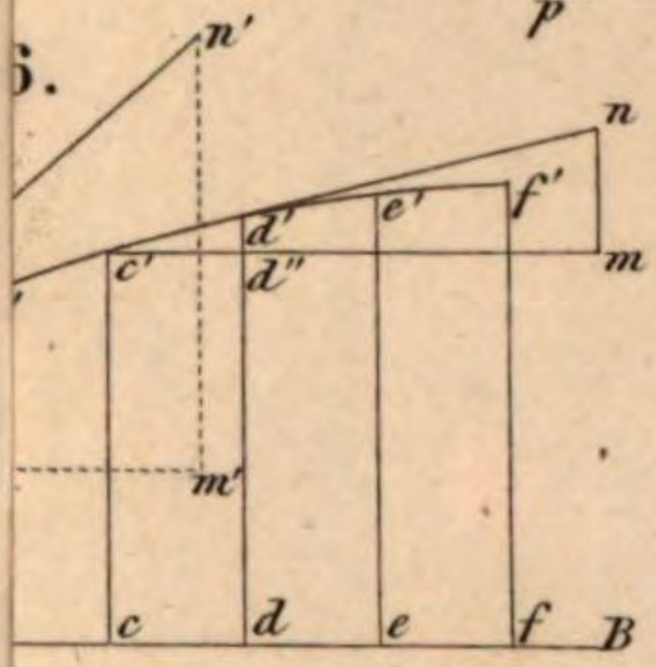


29.

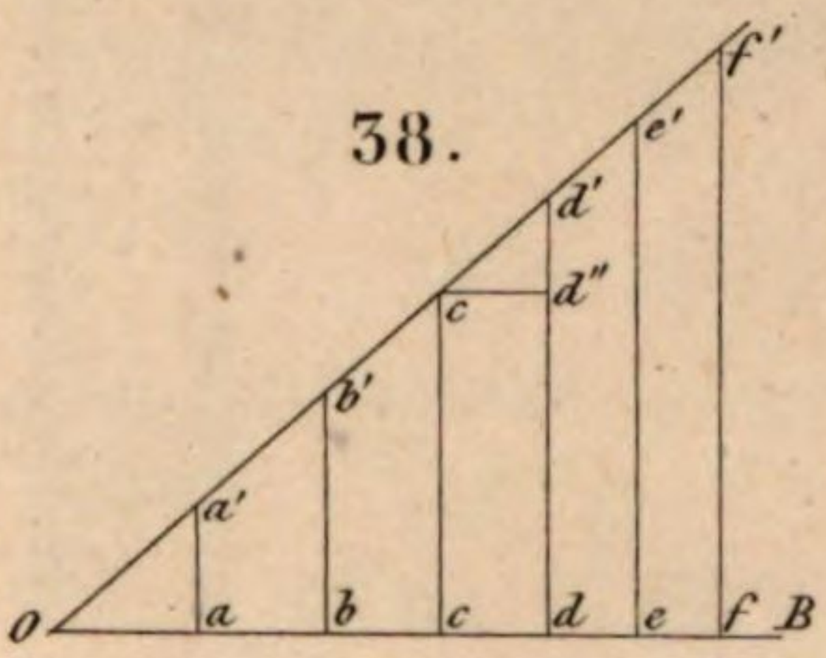


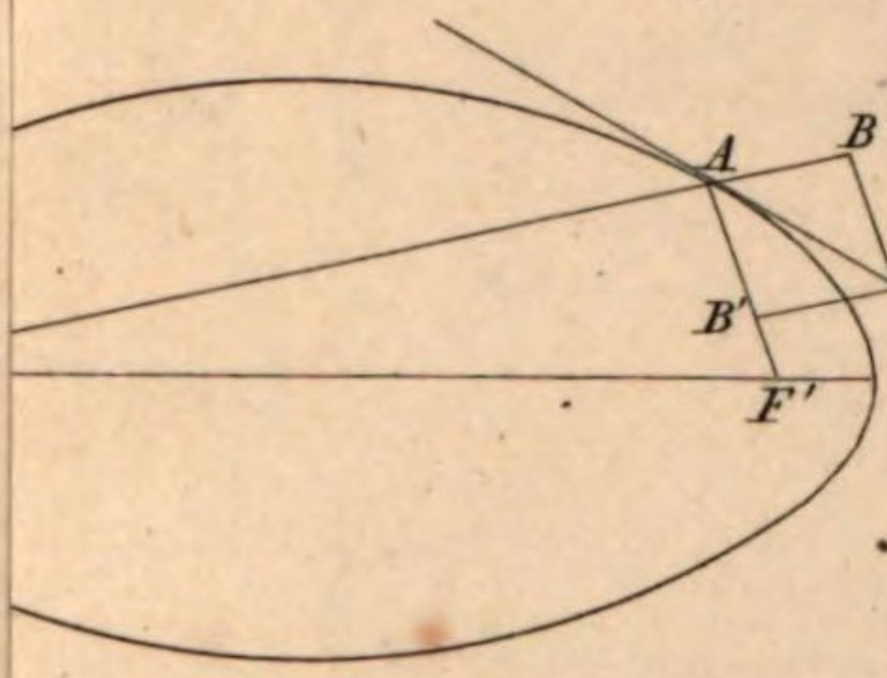
37.





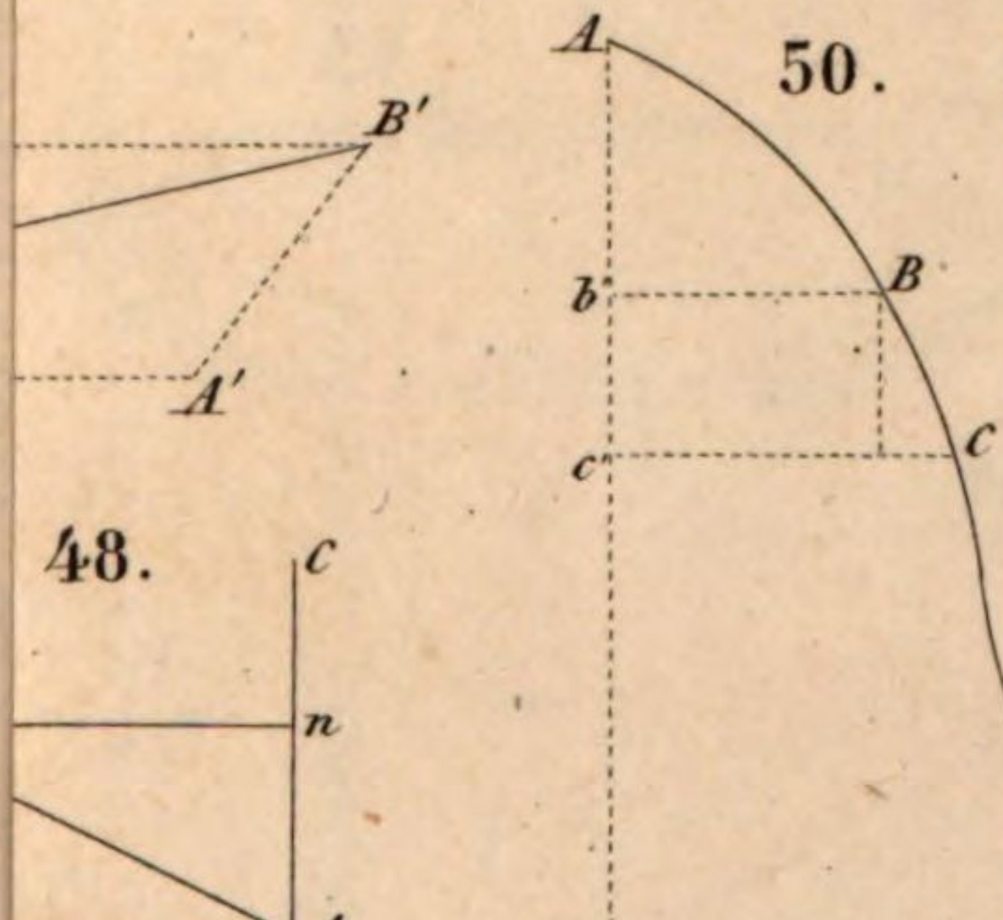
38.





44.

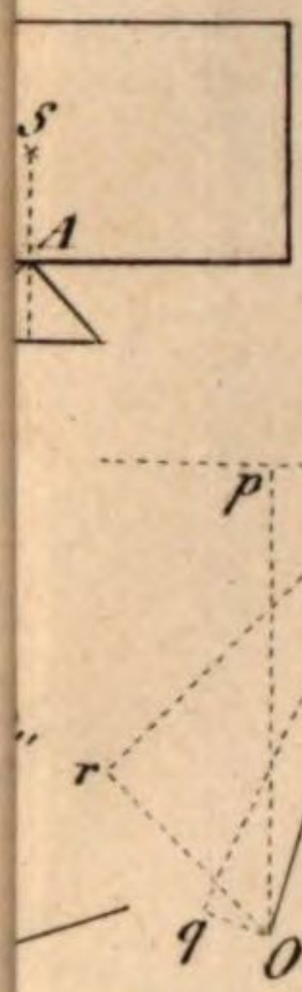
50.



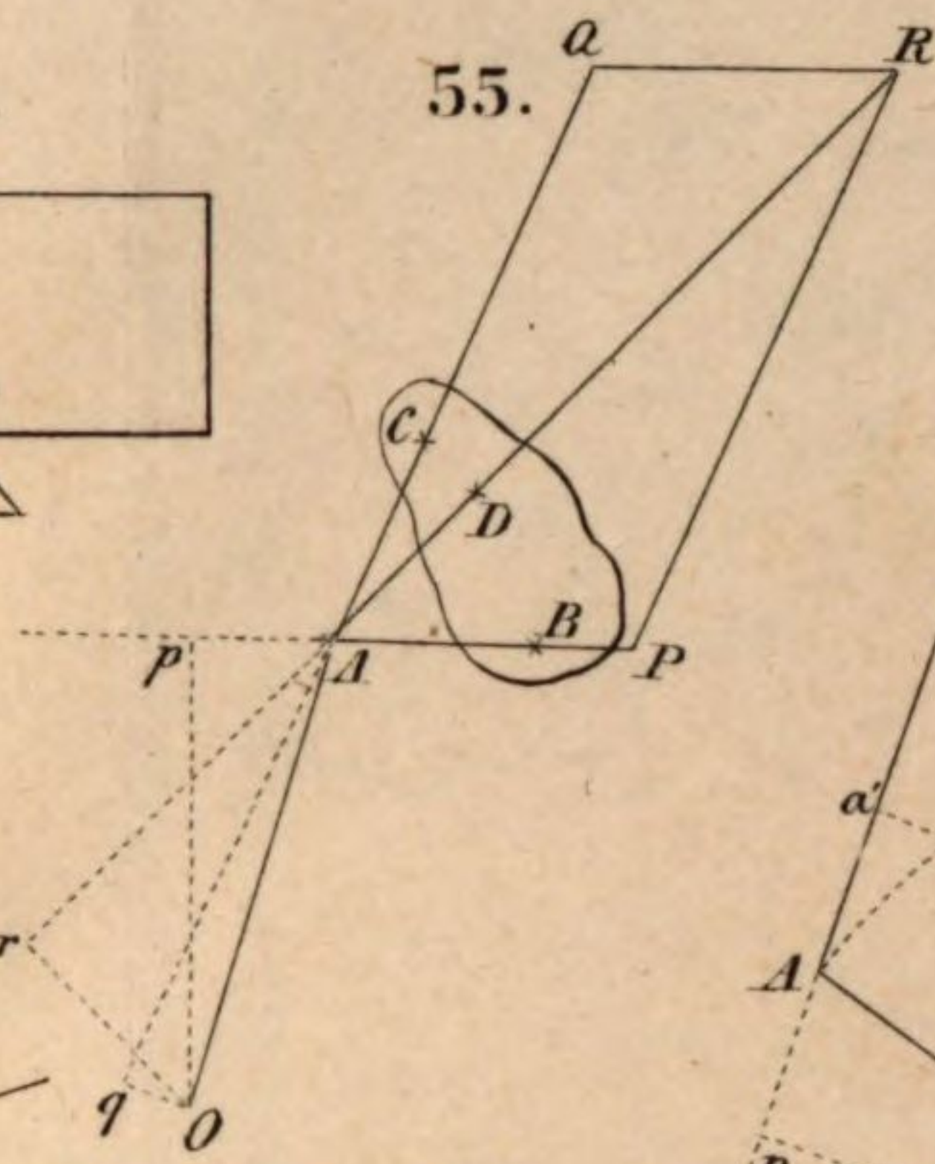
48.

J. A. Bühler sc. Nbg.

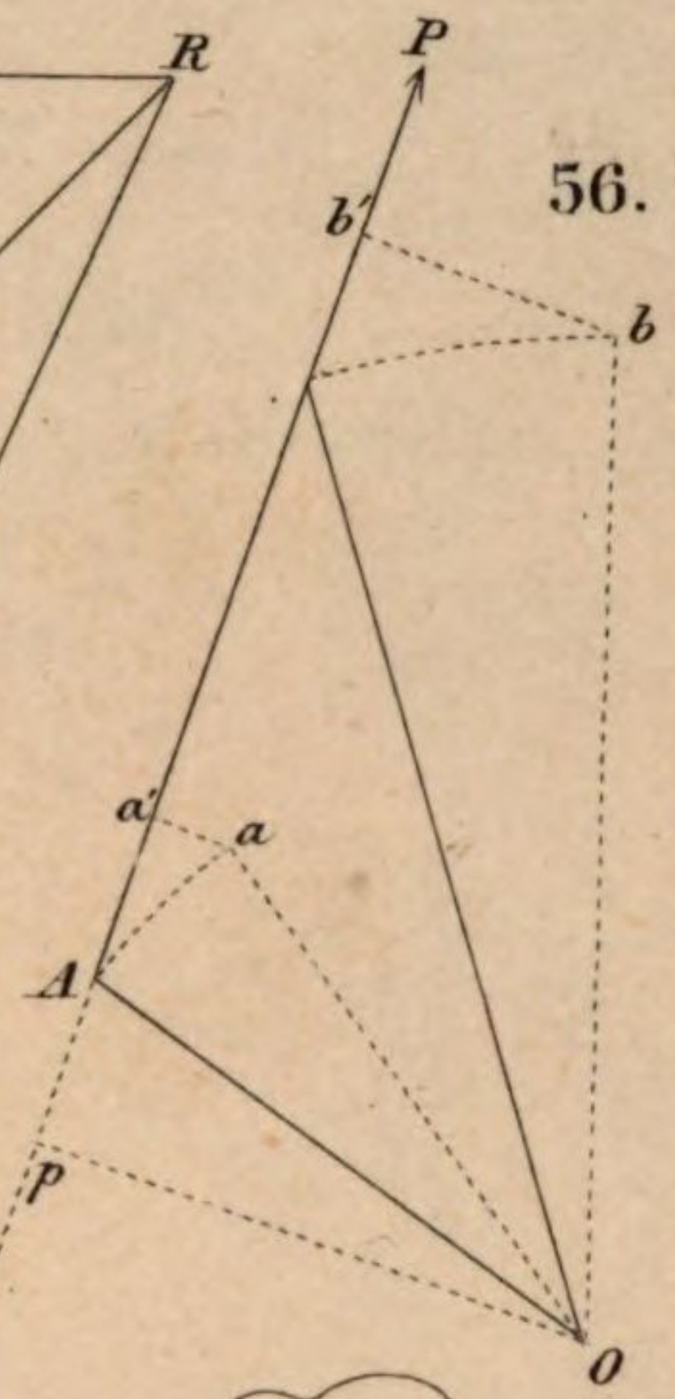
9.



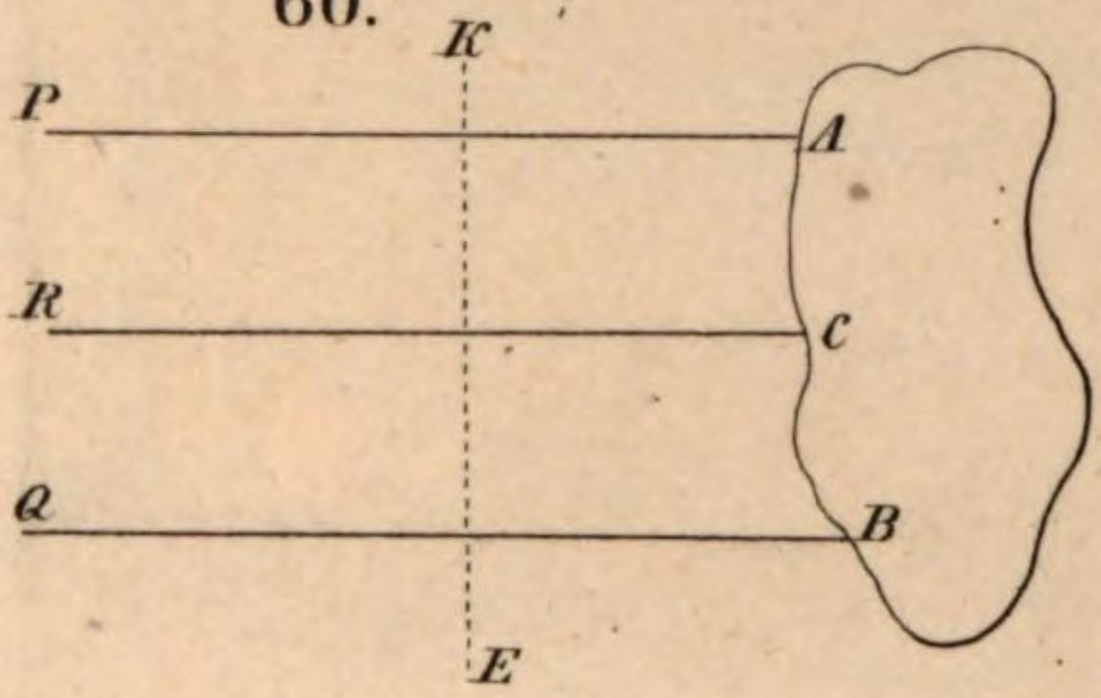
55.



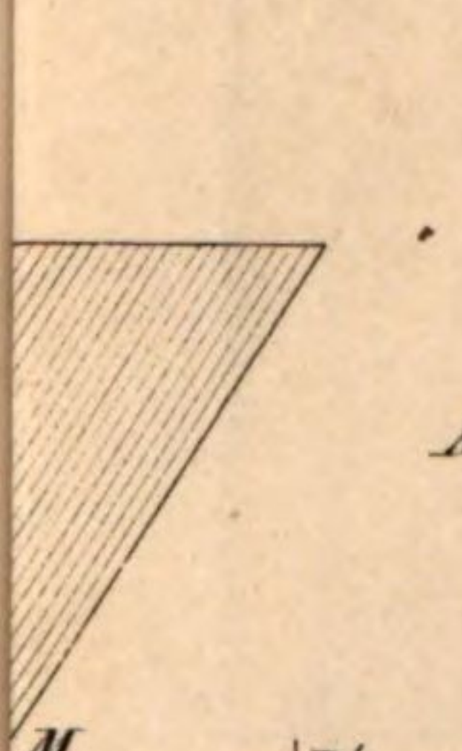
56.

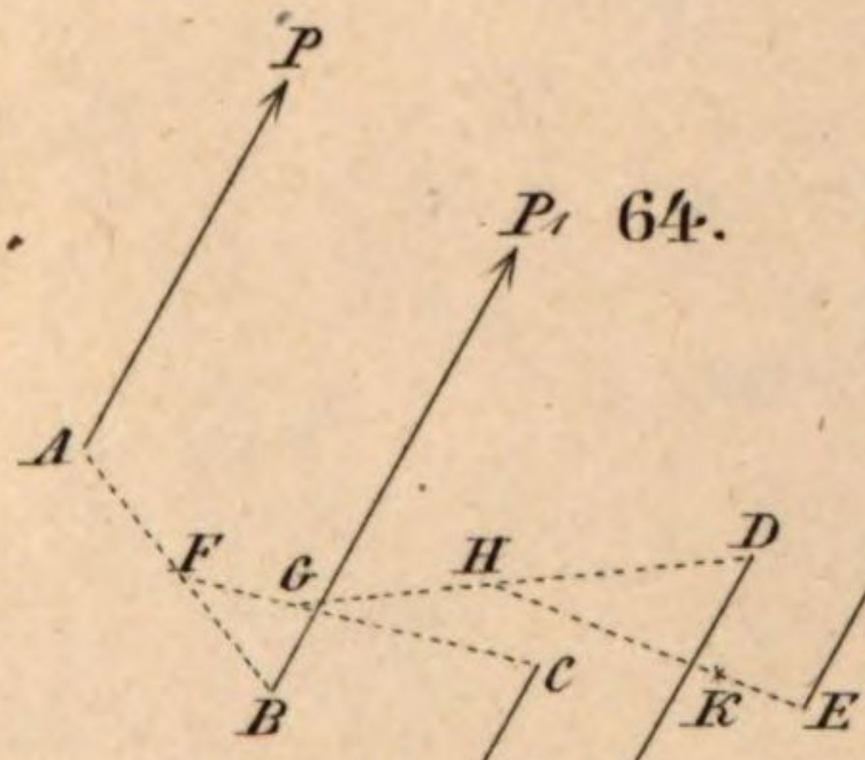


60.

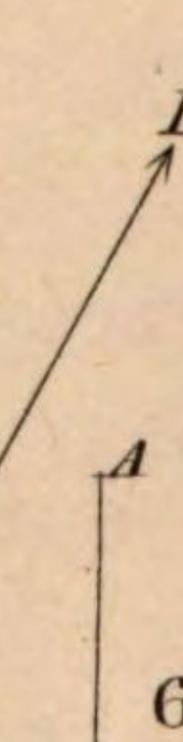


64.



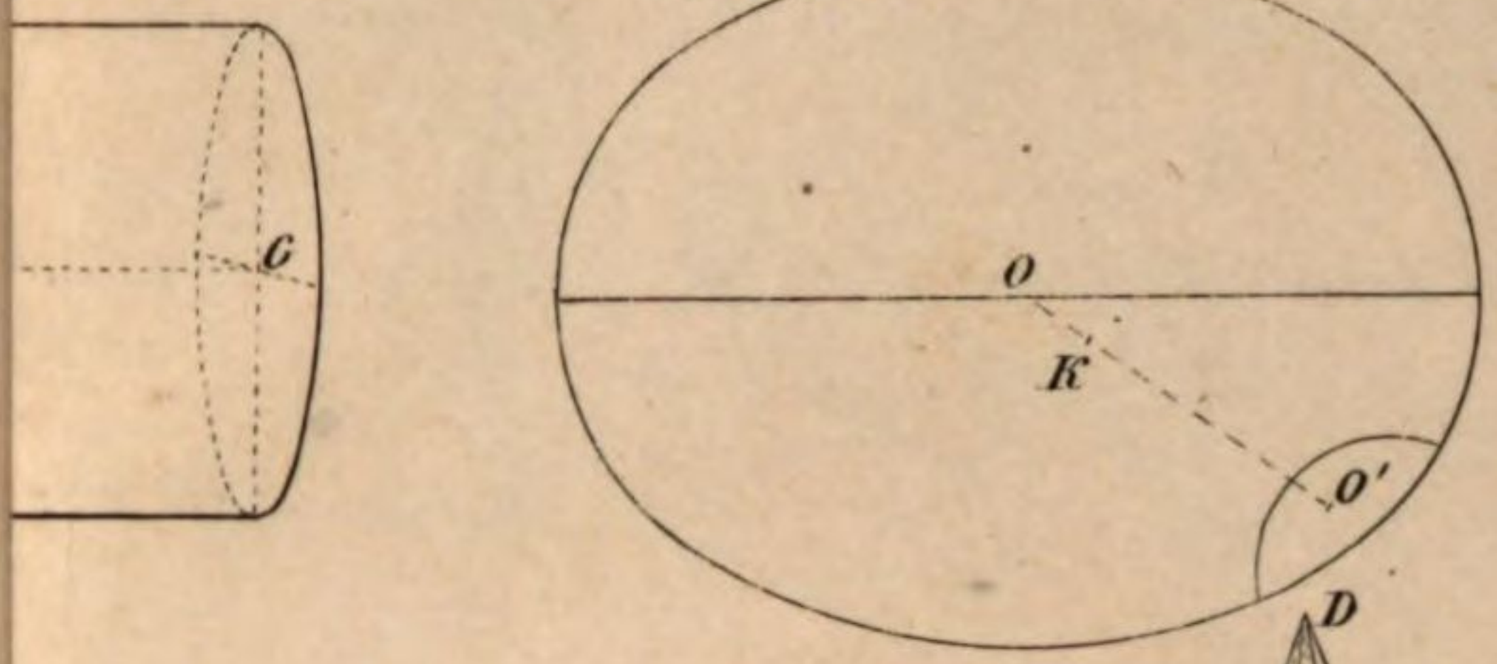


68.

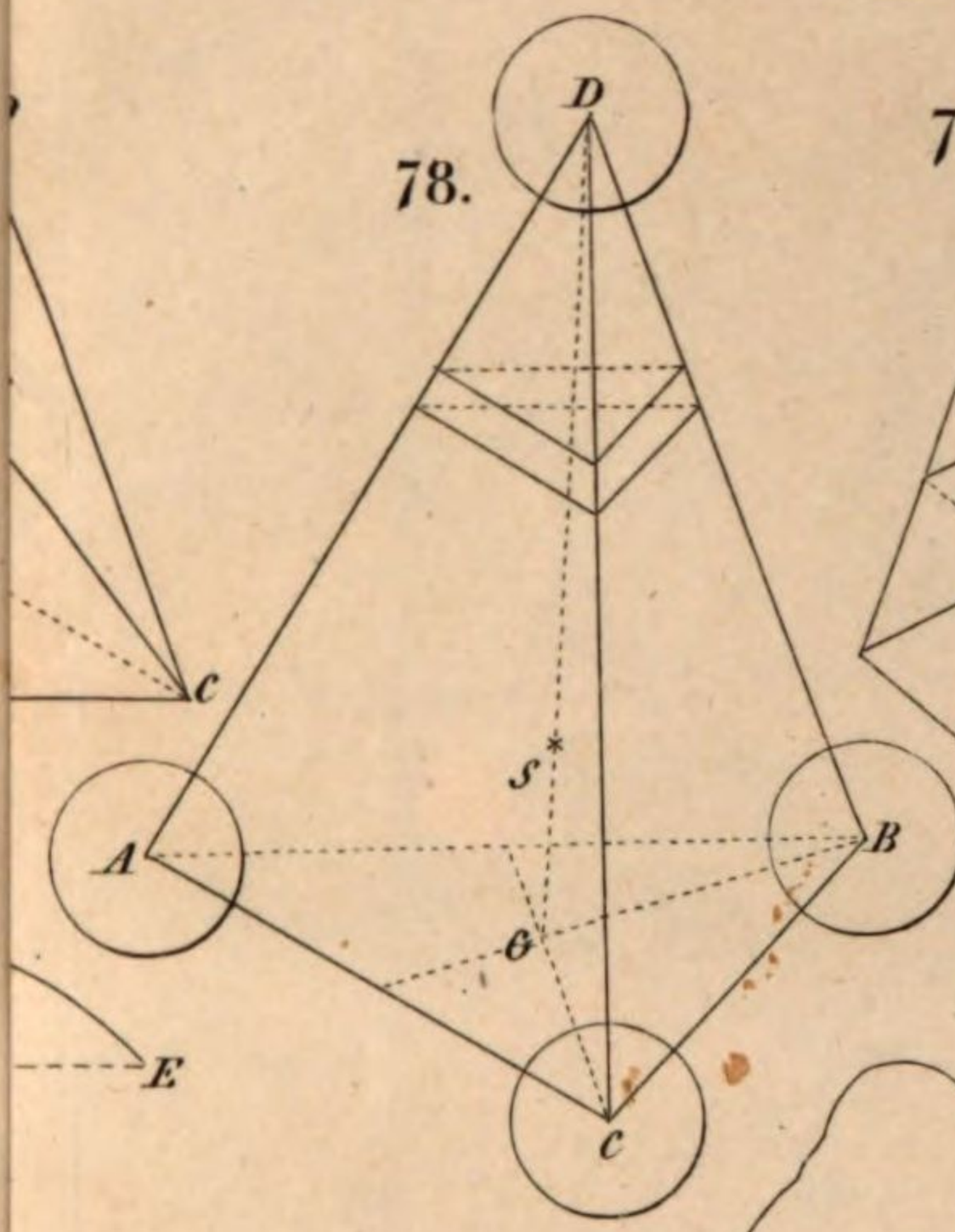


J. A. Bühler sc. Nbg.

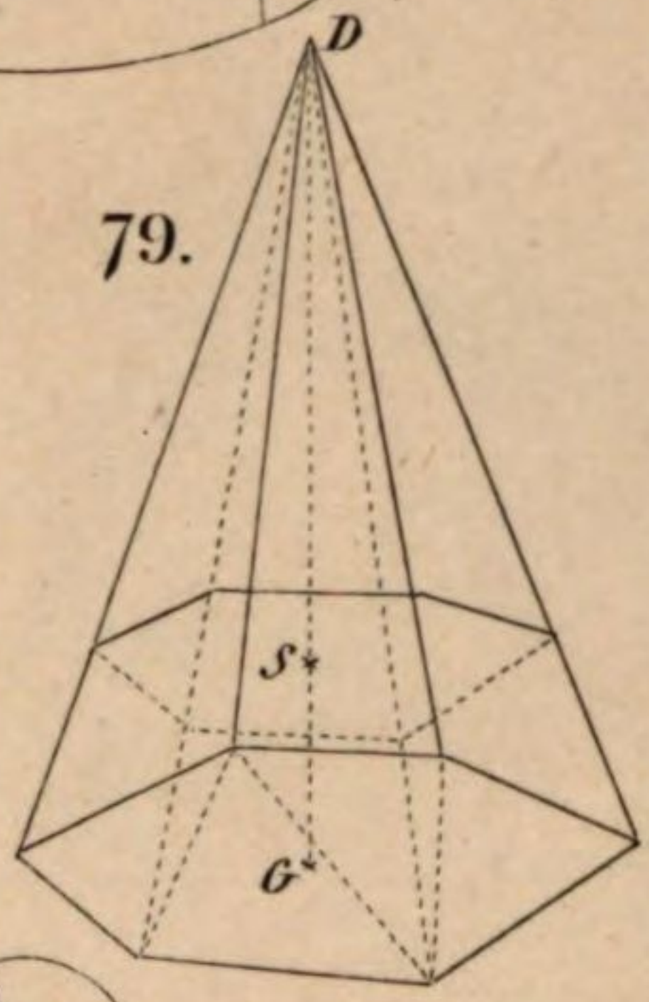
74.



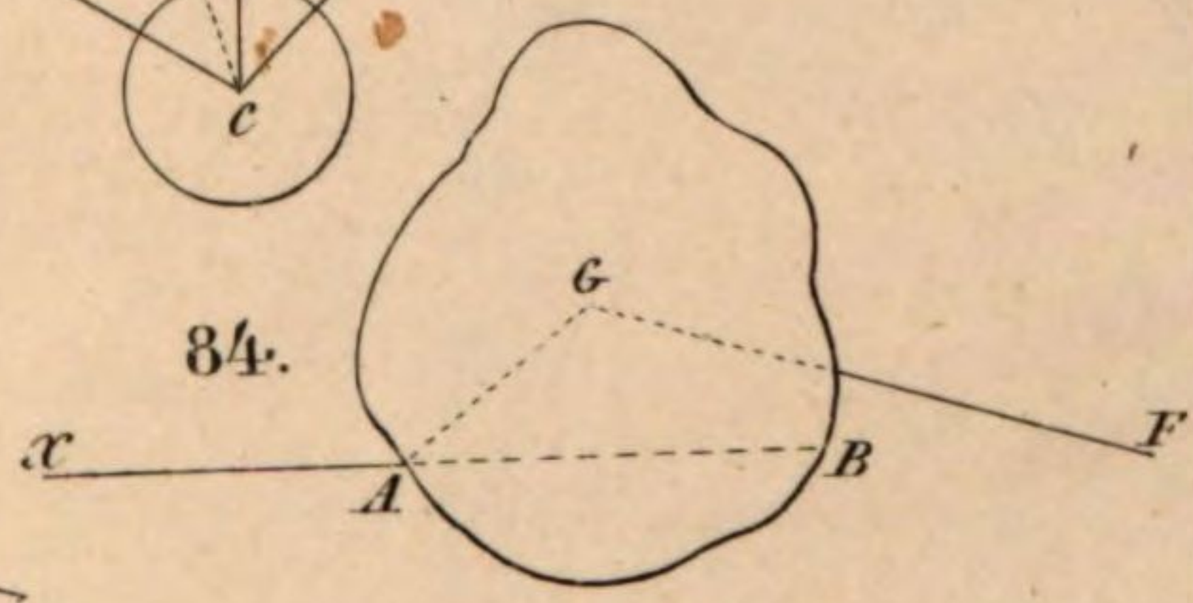
78.



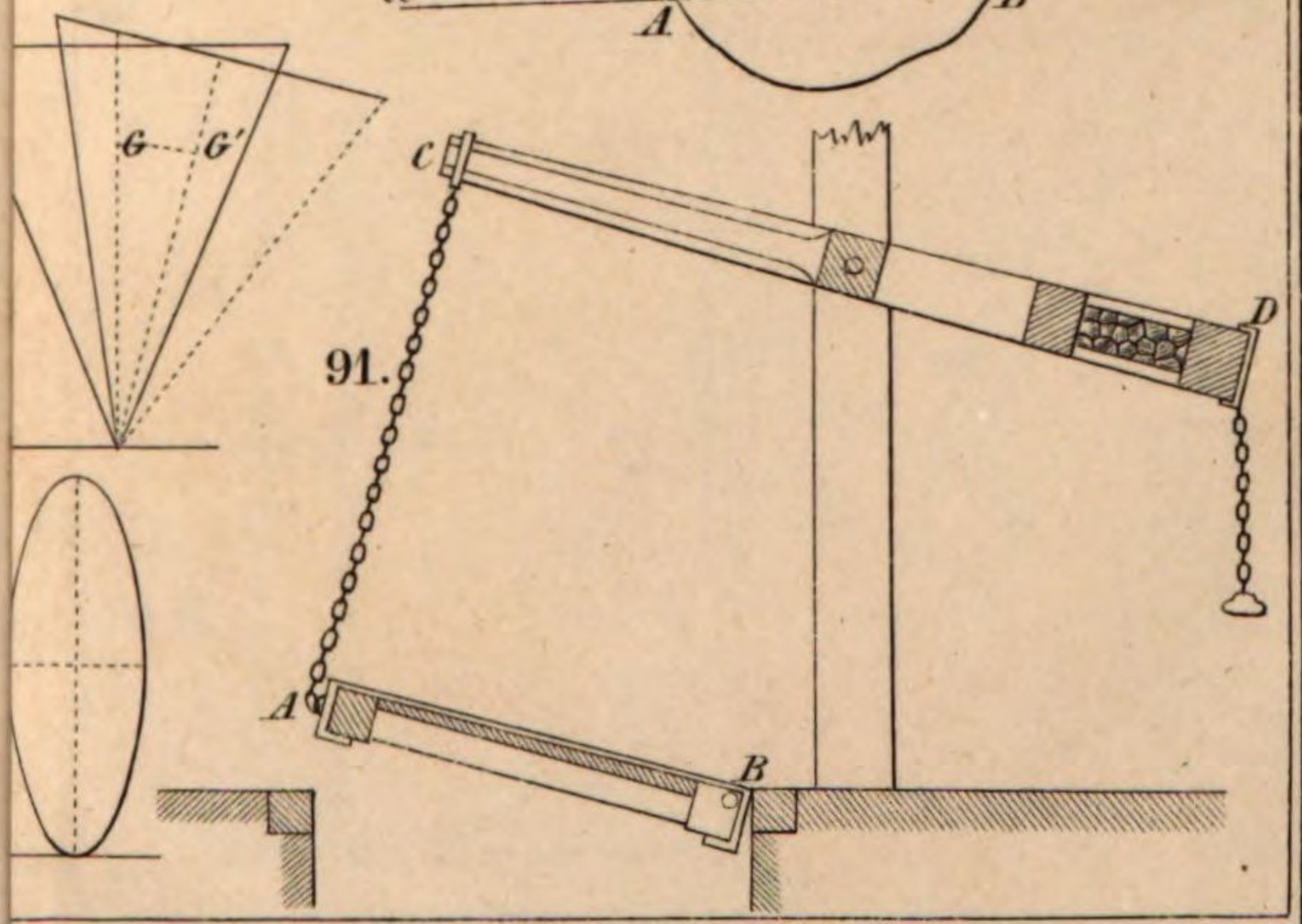
79.



84.

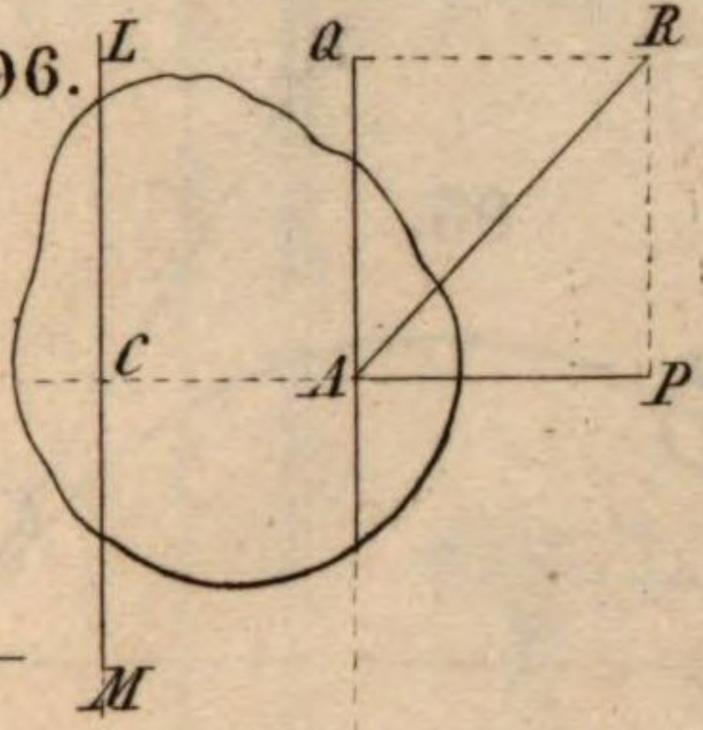


91.

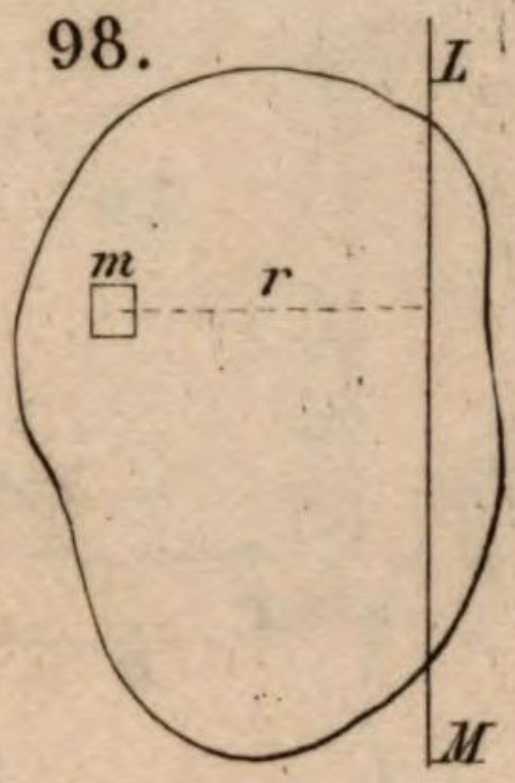


J. A. Bühler sc. Nbg.

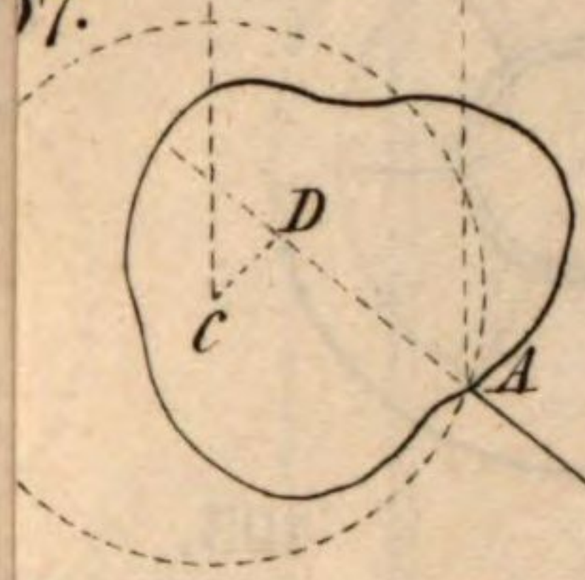
96.



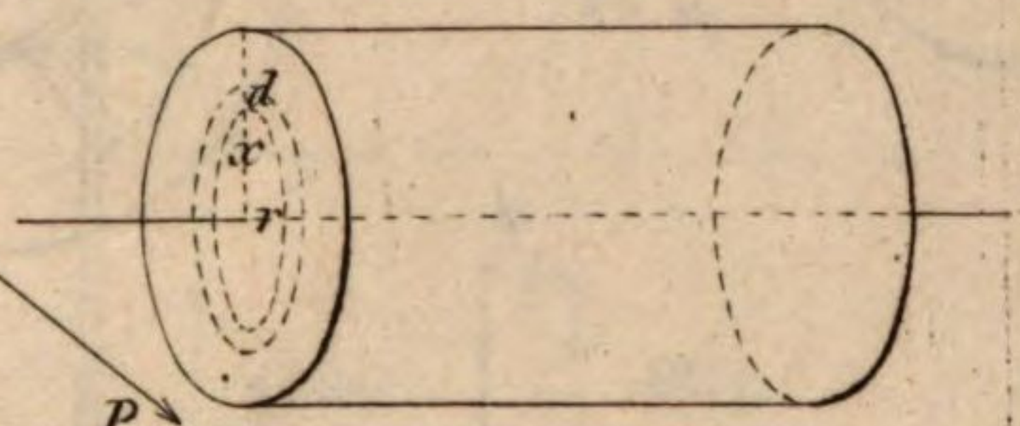
98.



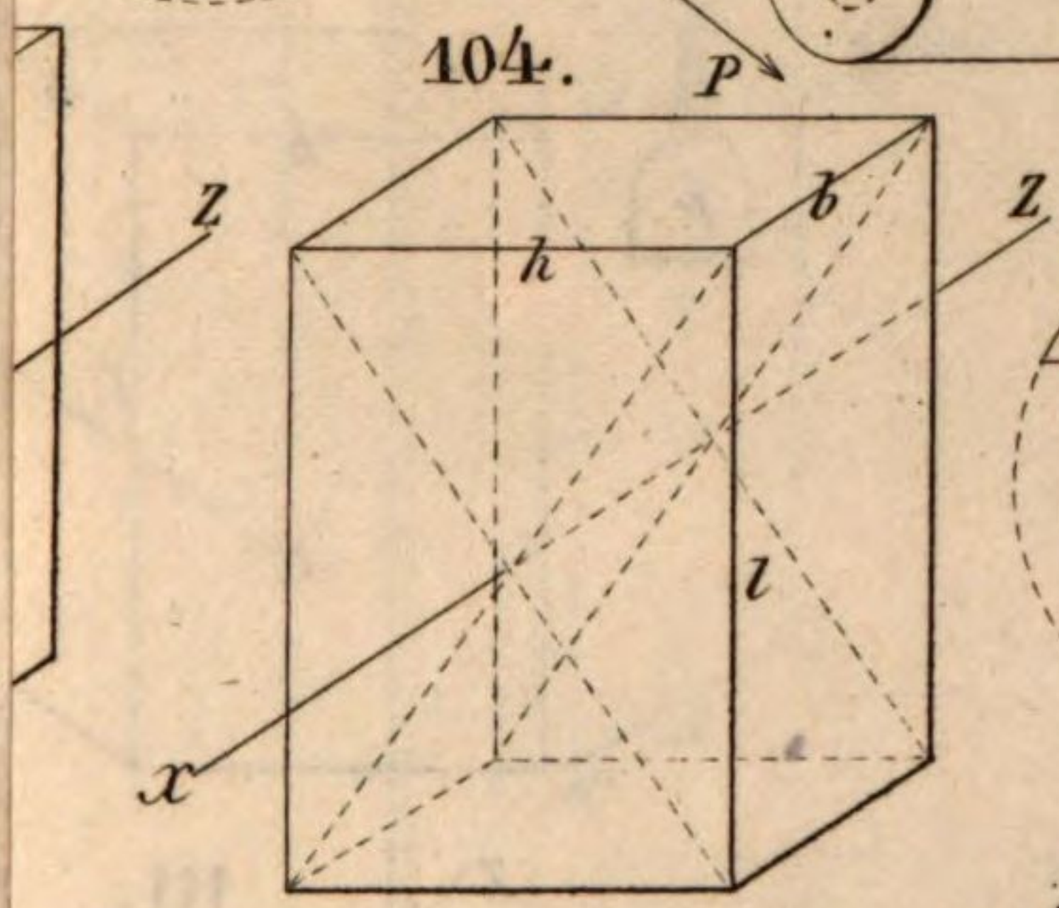
97.



105.

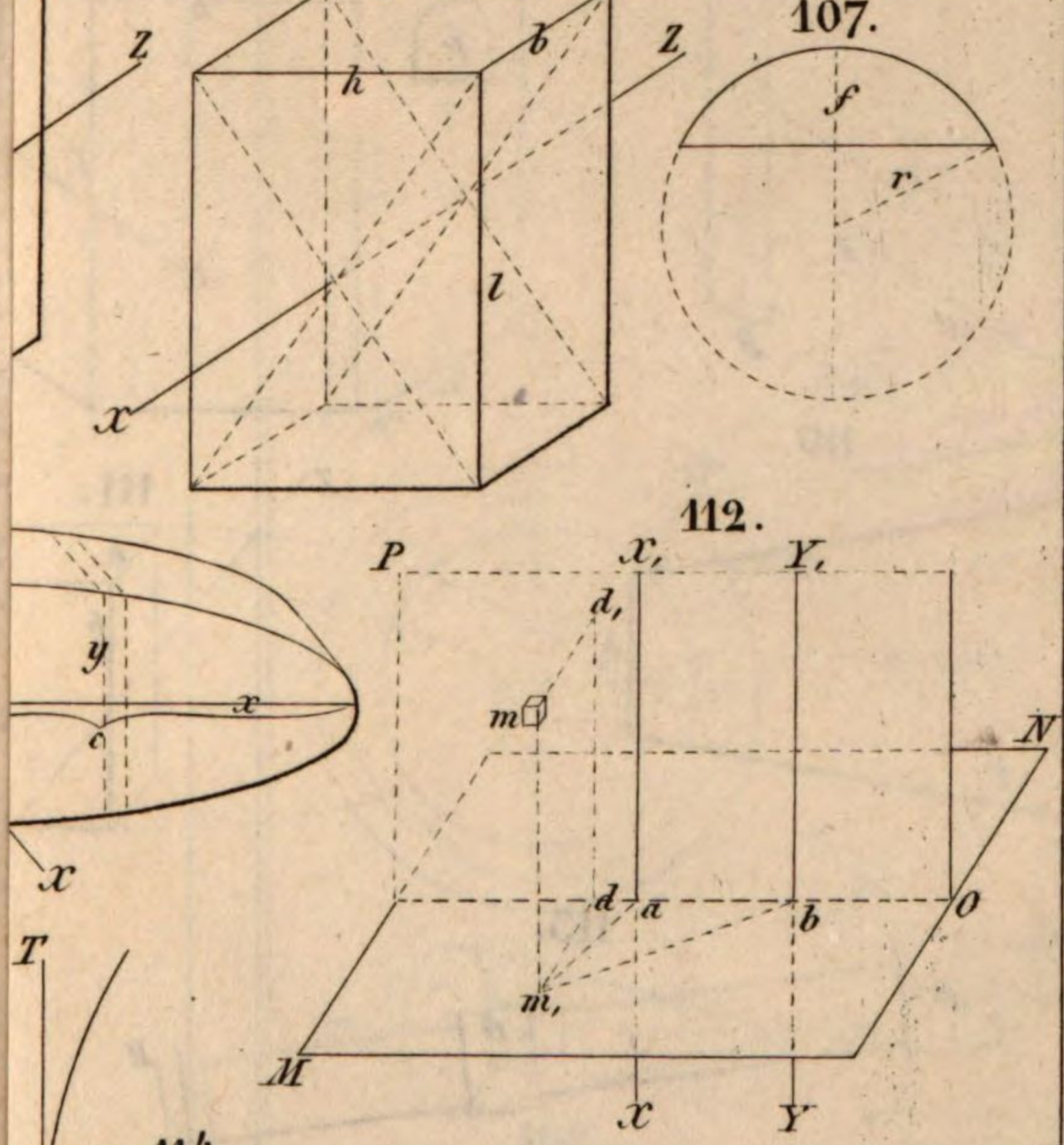


104.

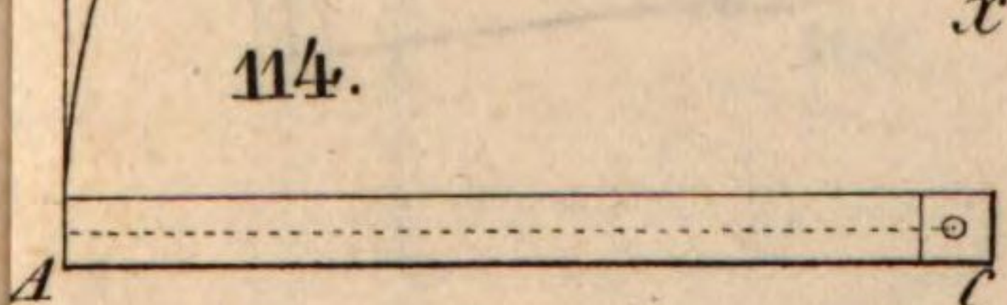


107.

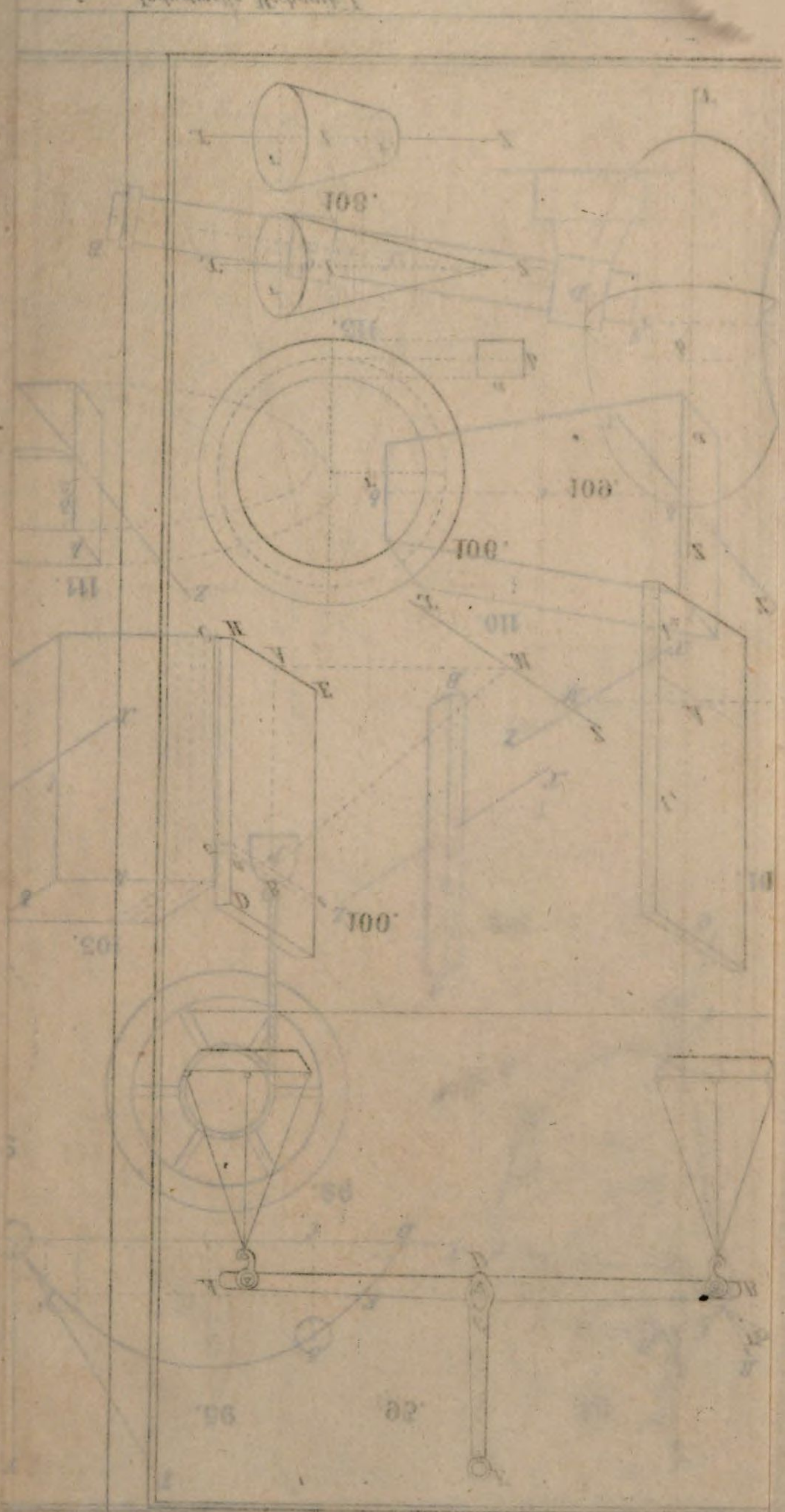
112.



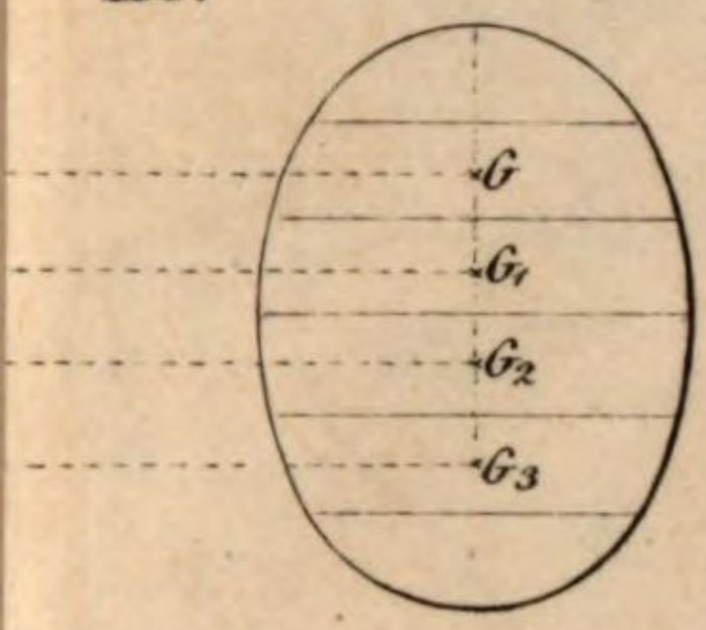
114.



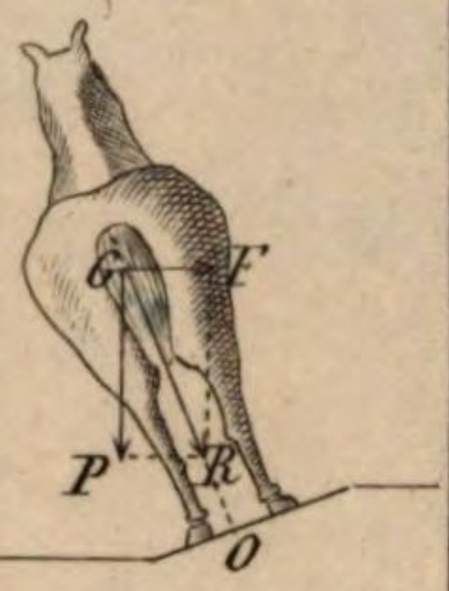
J. A. Bühler sc. Nbg.



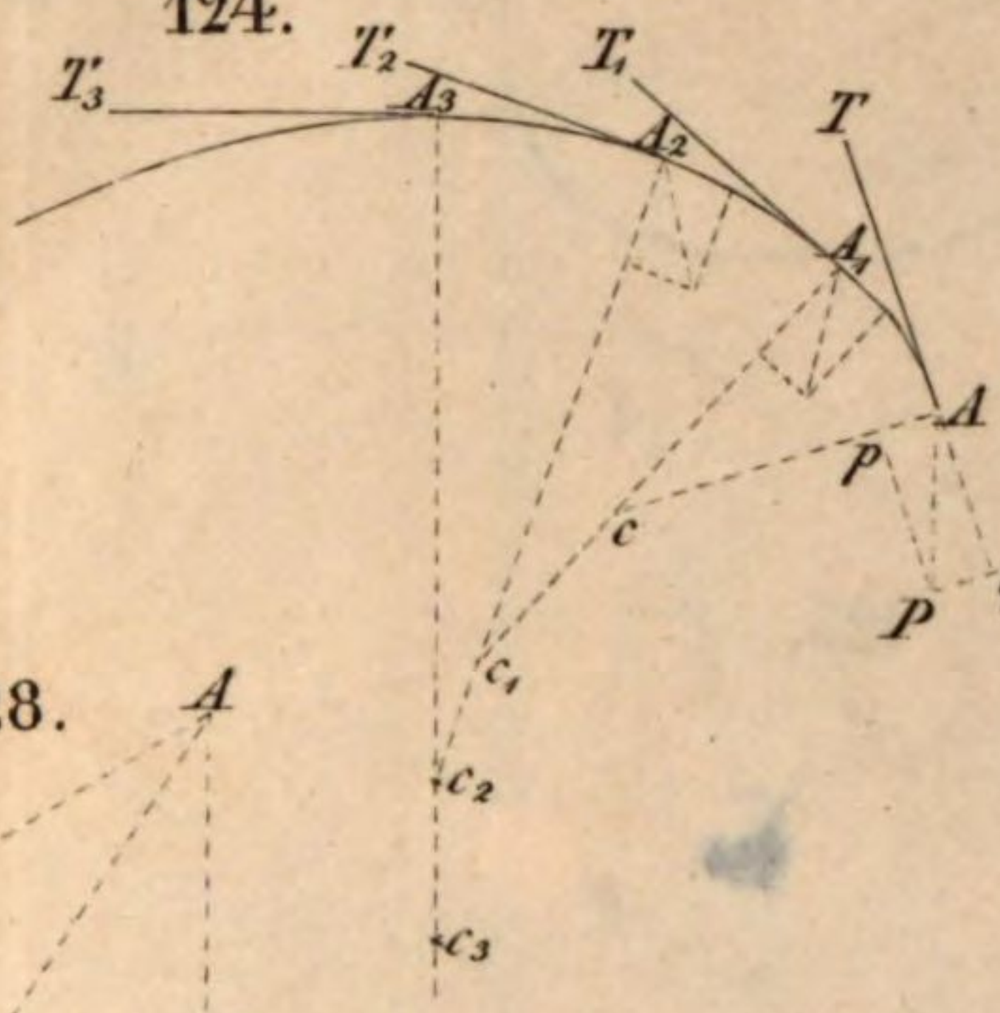
118.



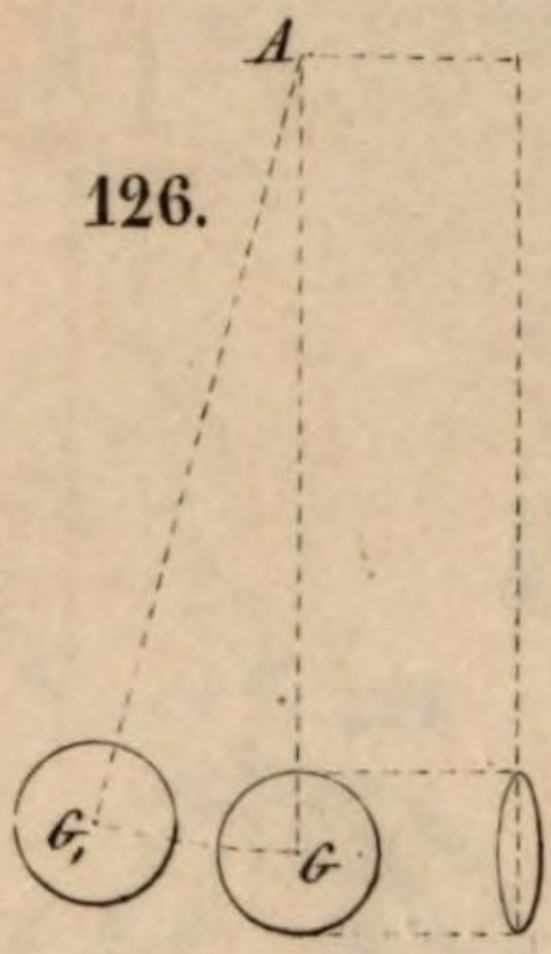
119.



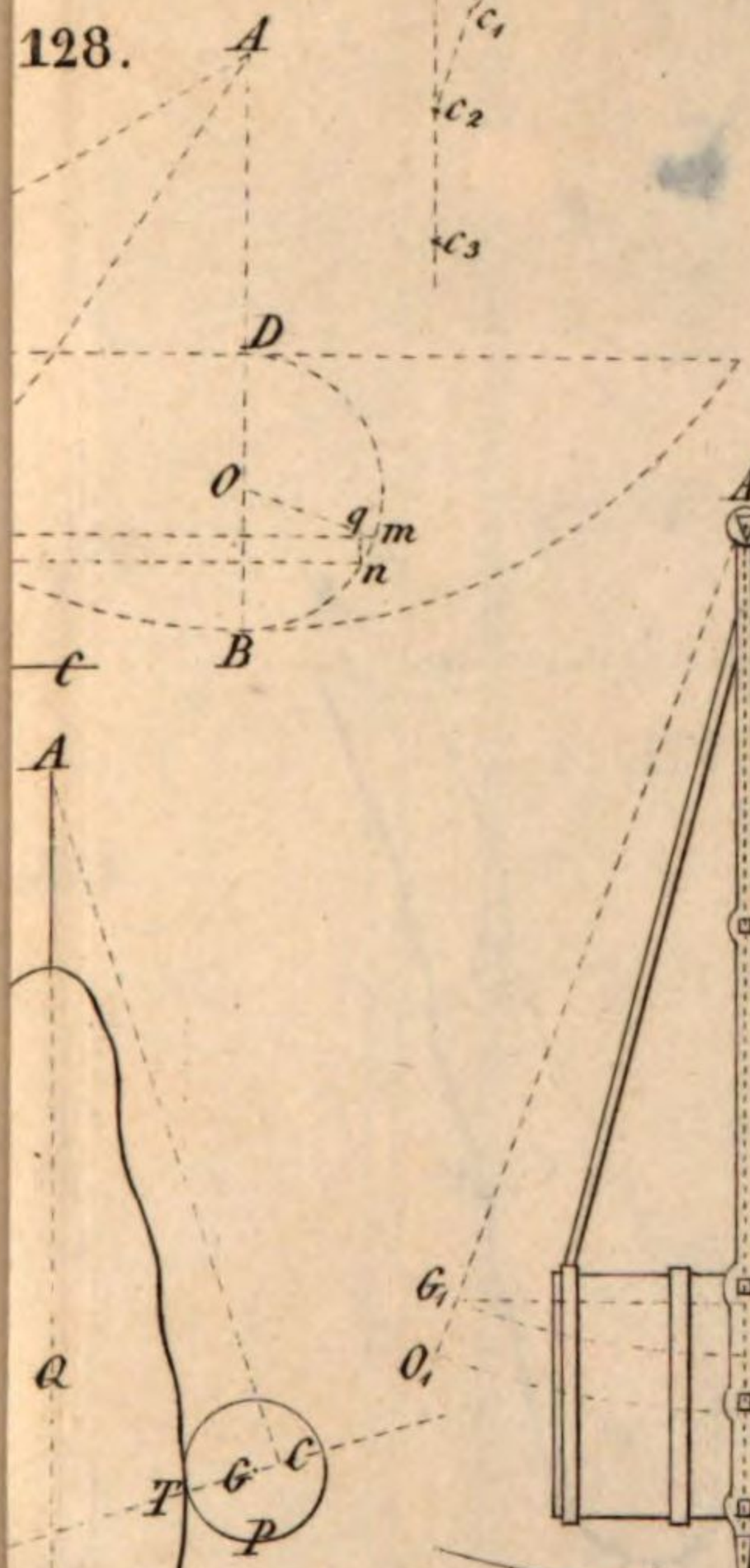
124.



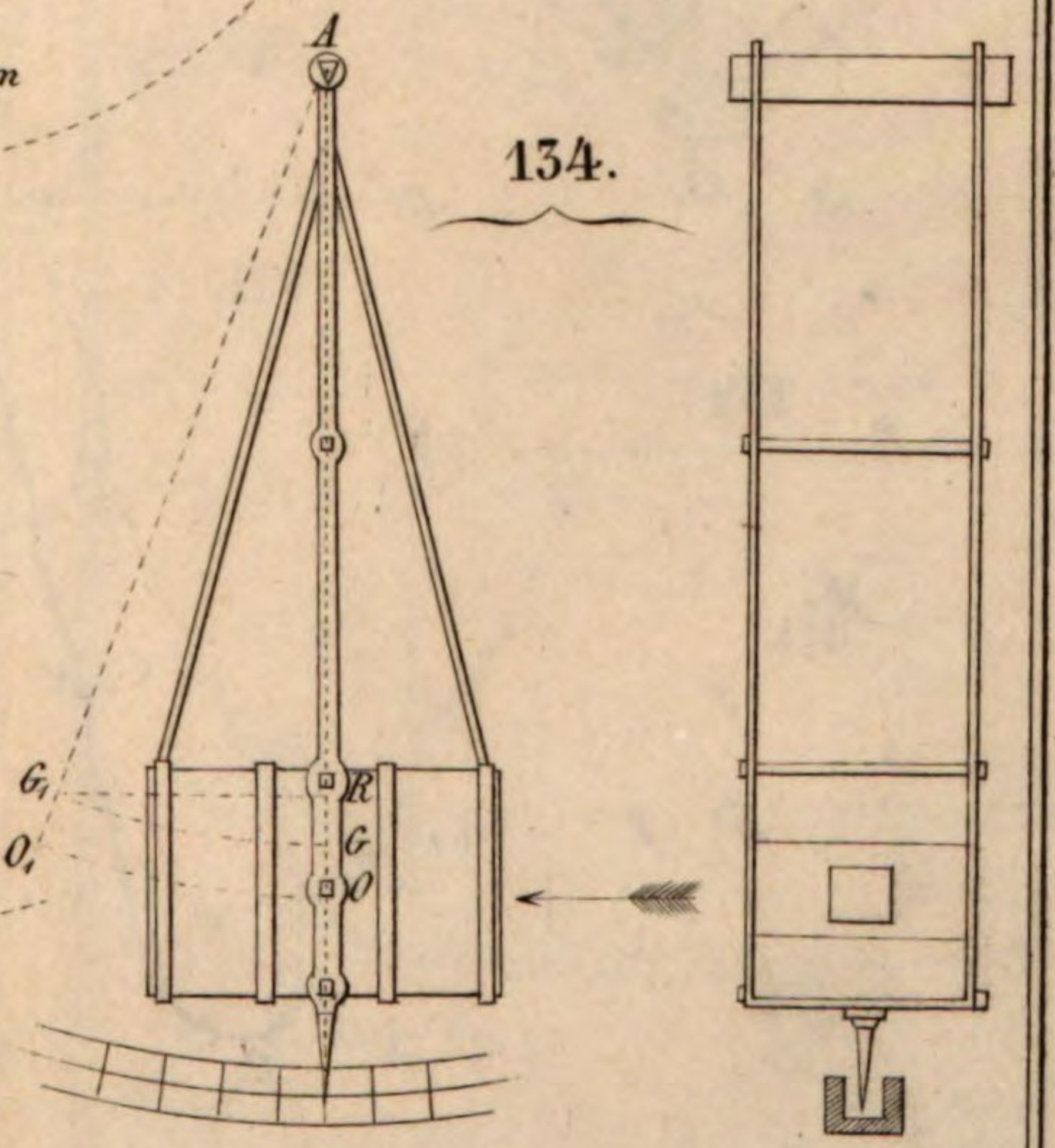
126.



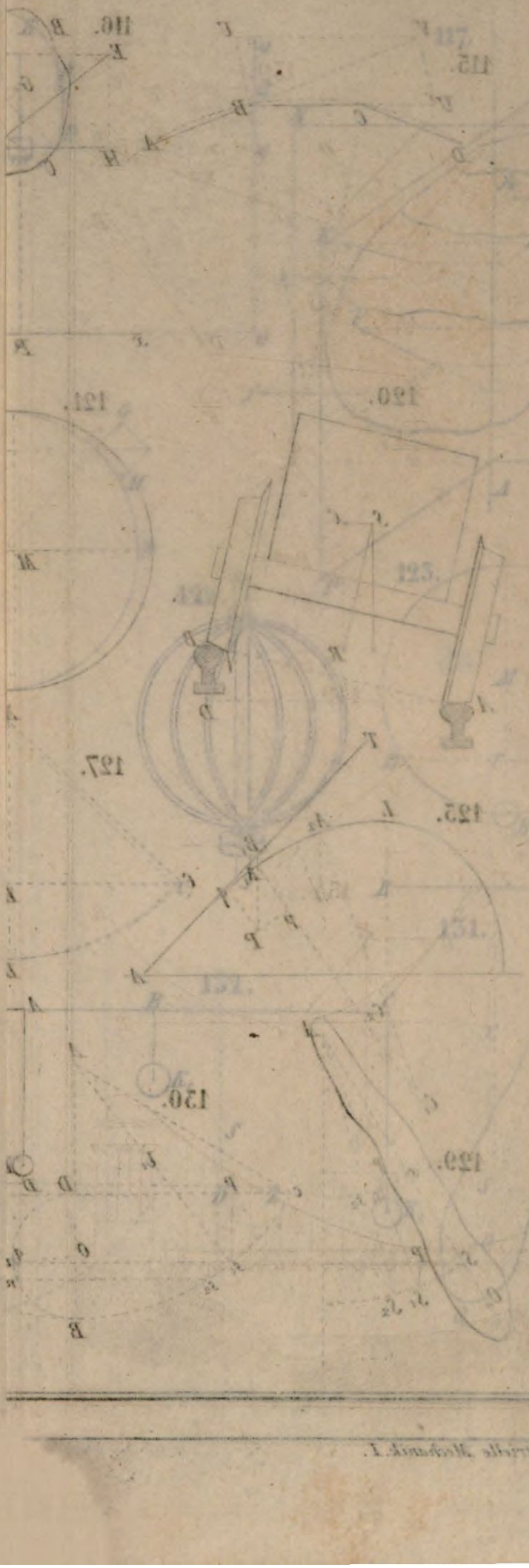
128.



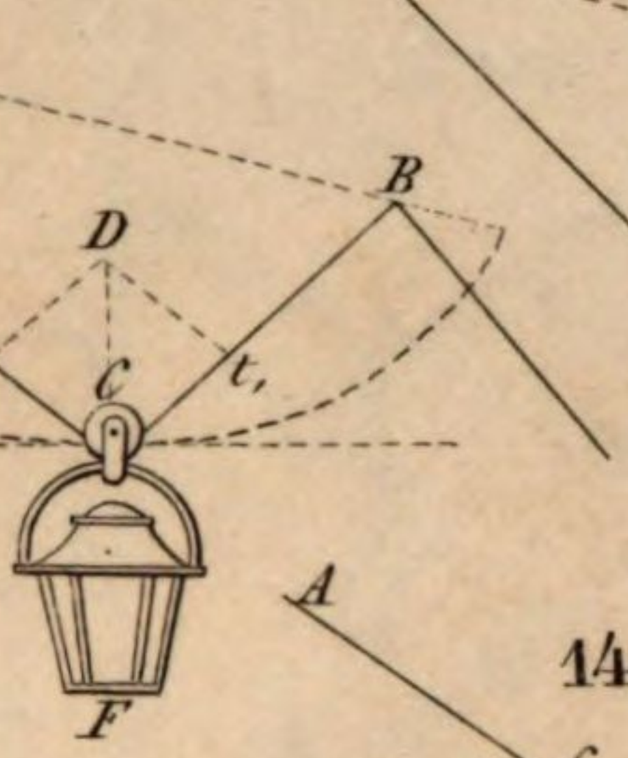
134.



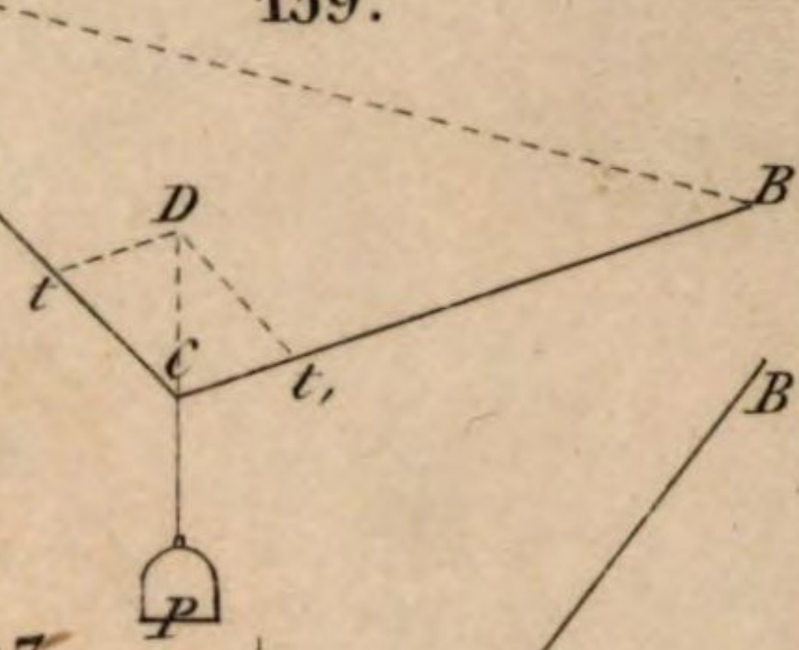
J.A.Bühler sc. Nürnbg.



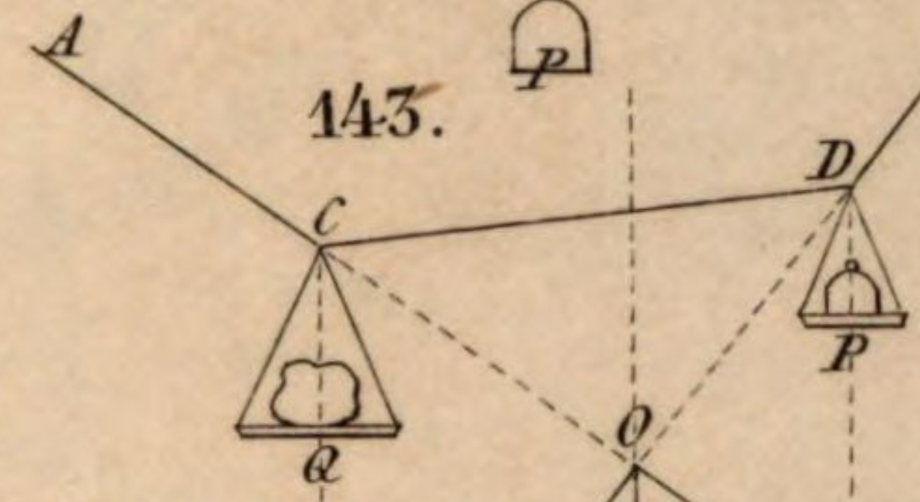
138.



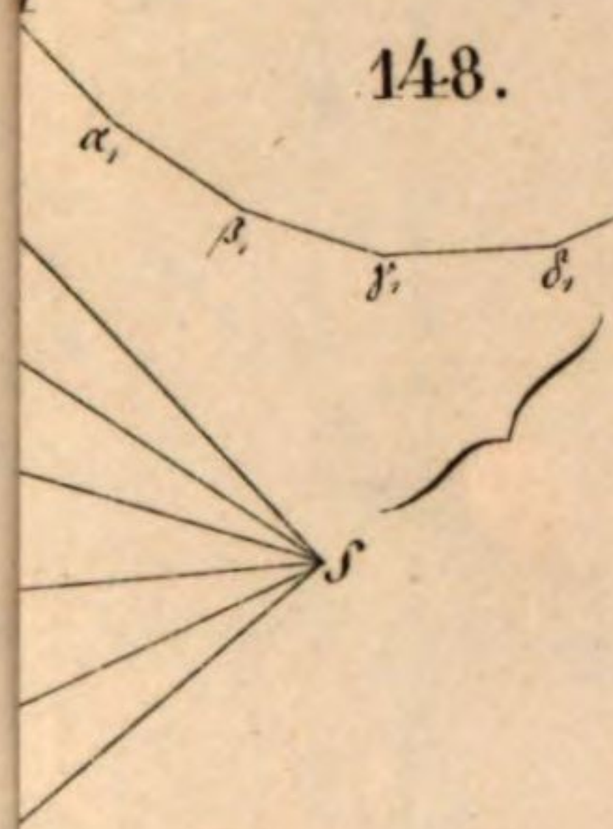
139.



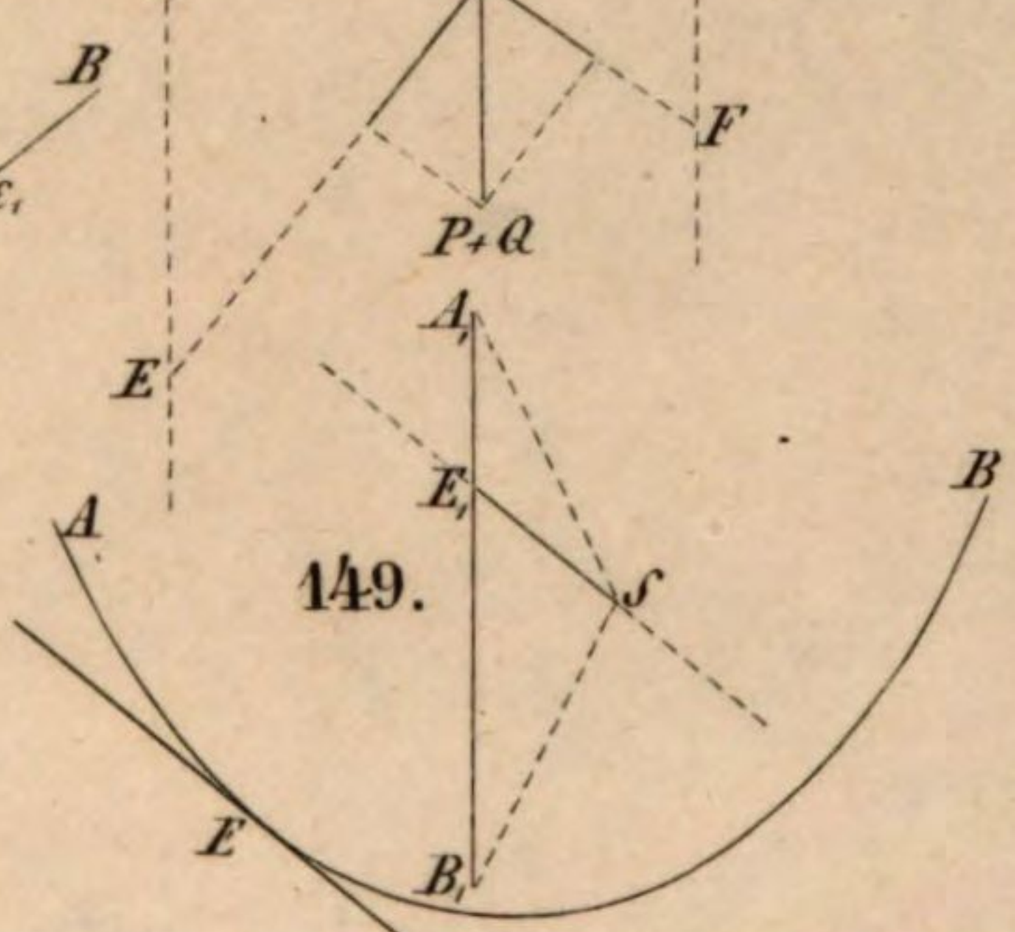
143.



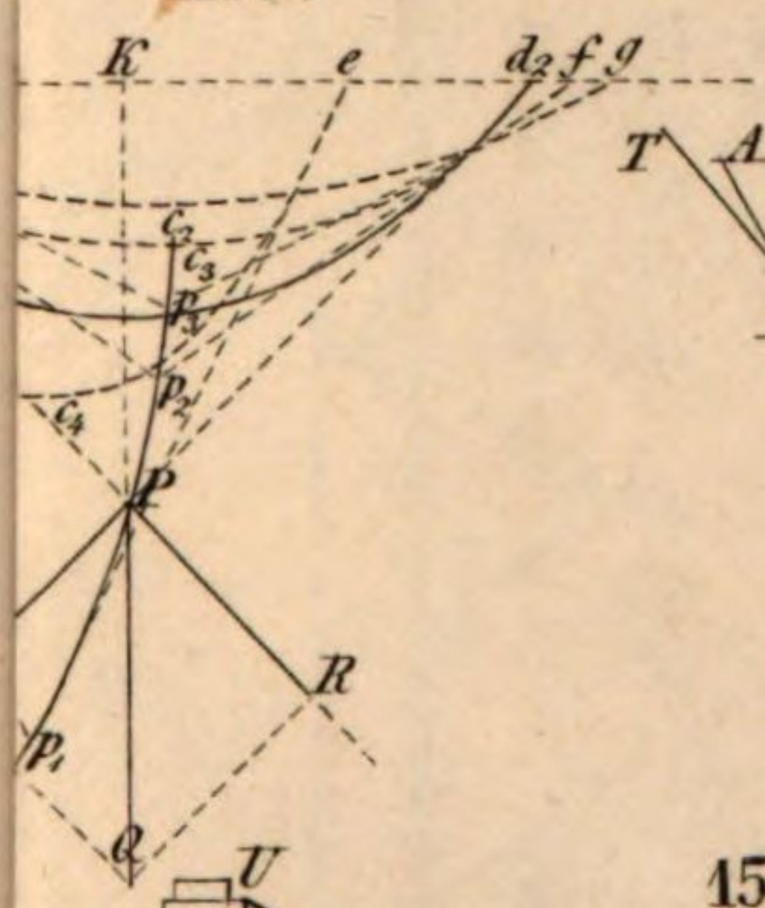
148.



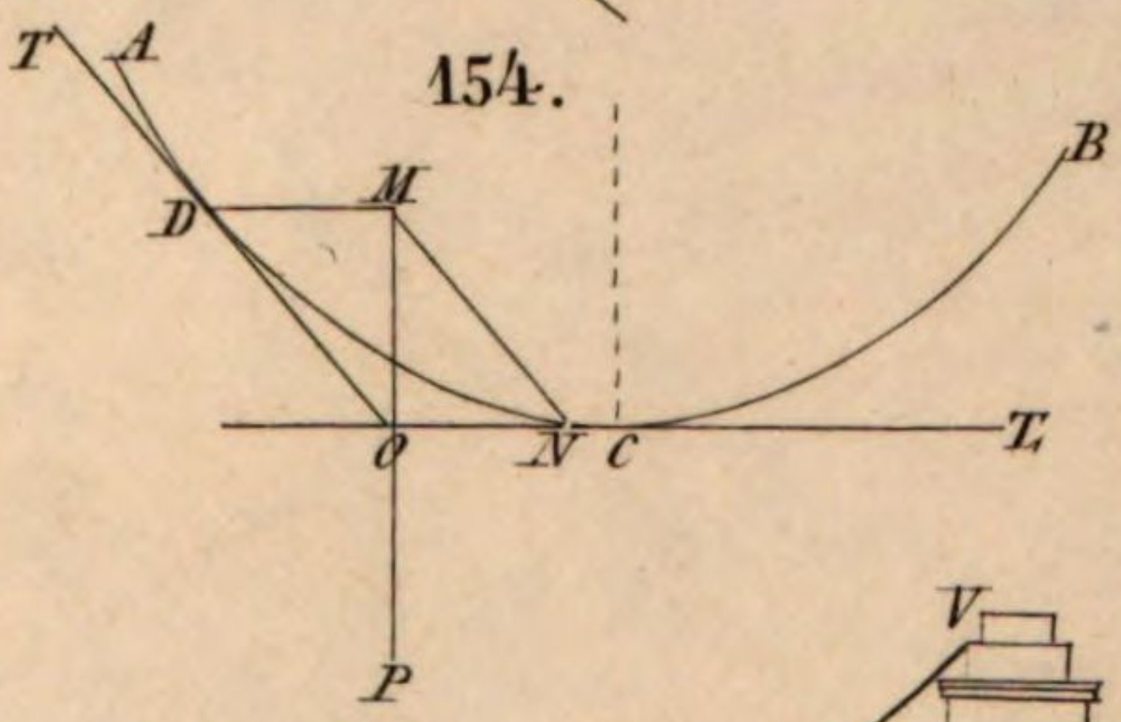
149.



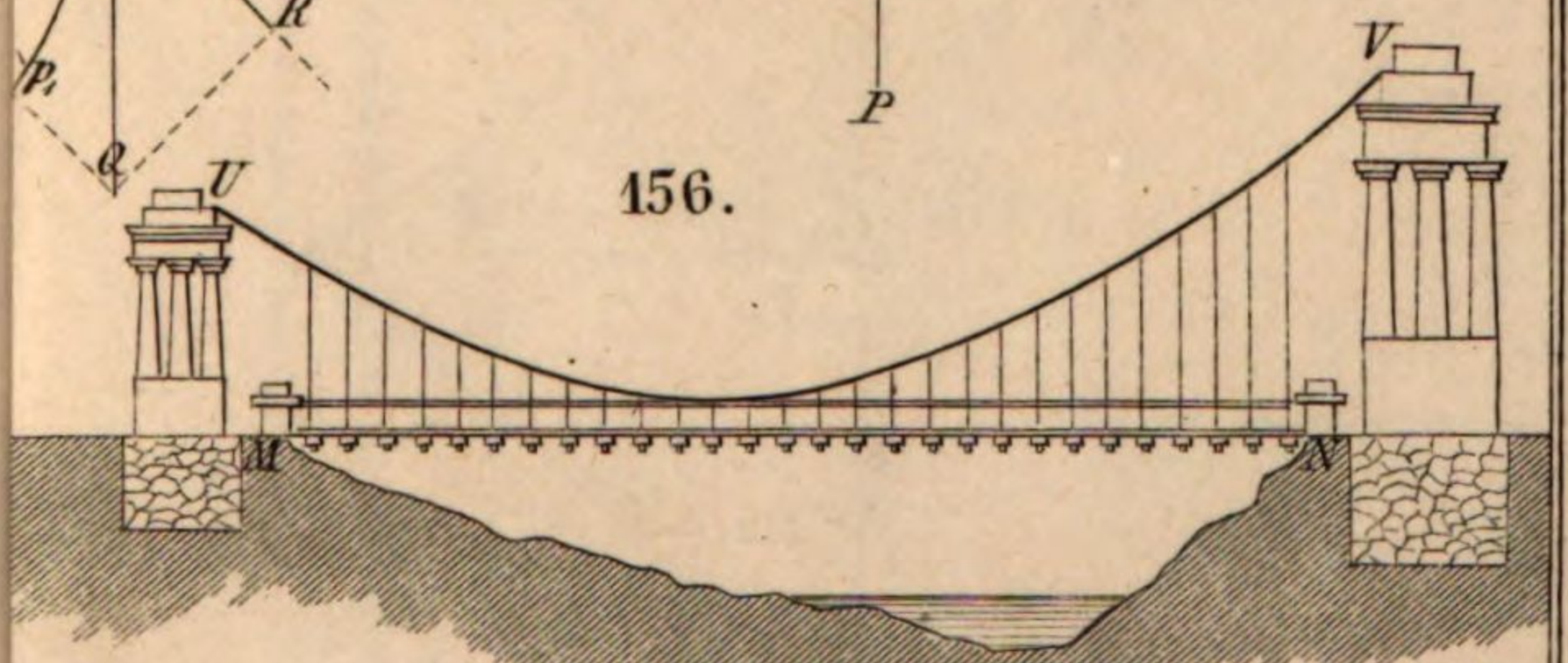
153.



154.

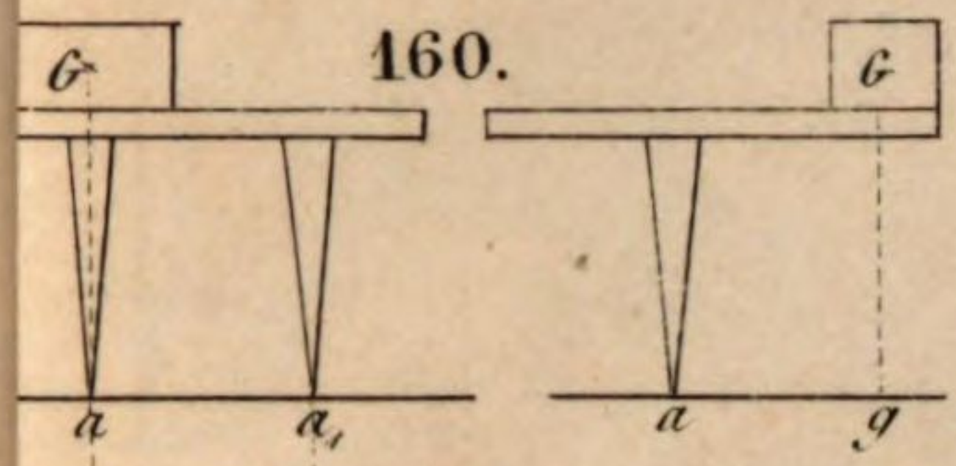


156.

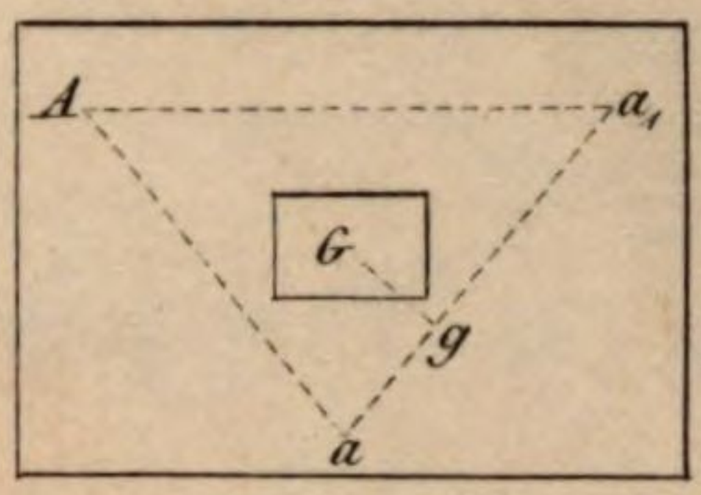


J. A. Bühler sc.

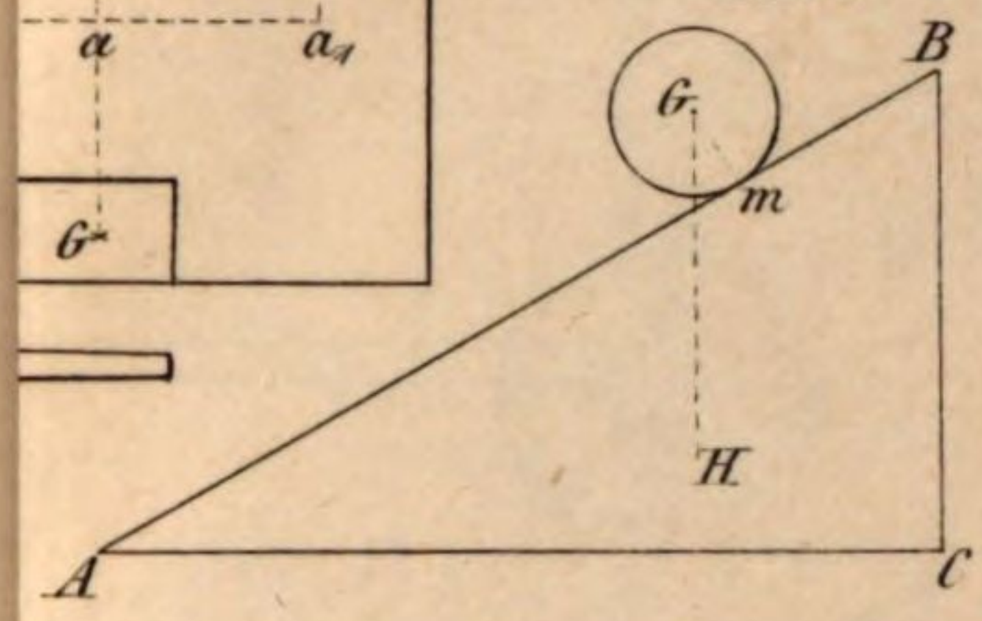
160.

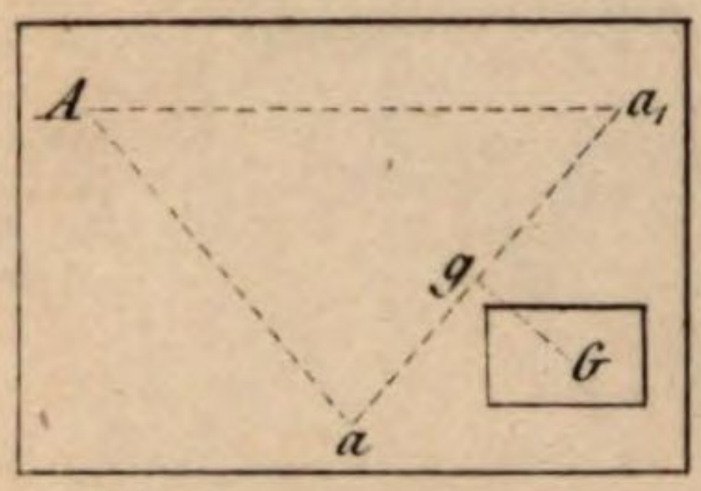


161.

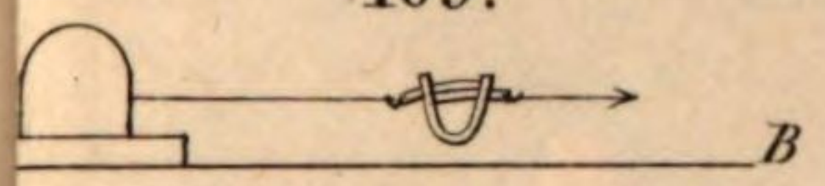


166.

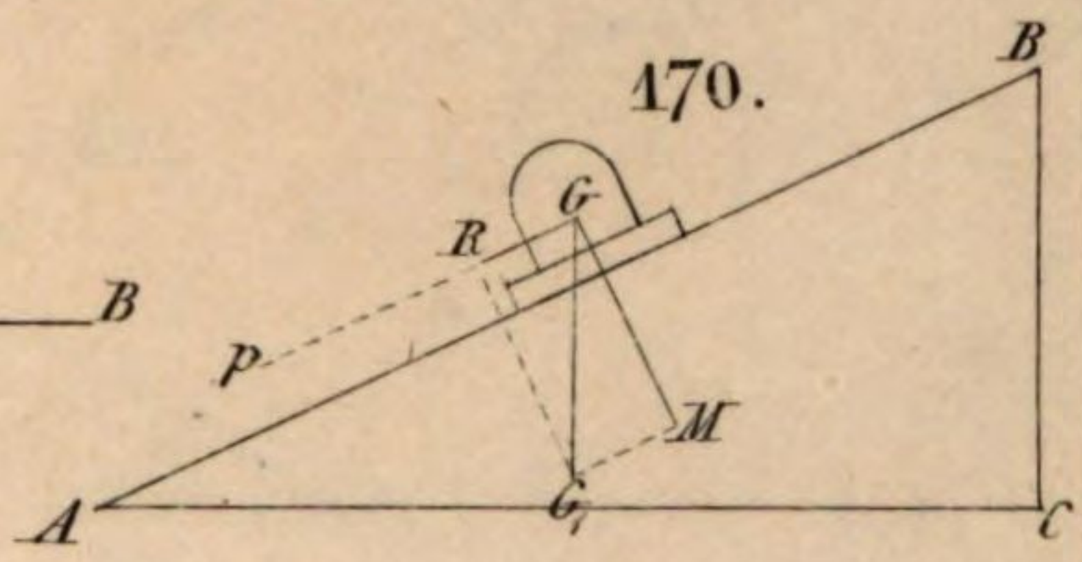




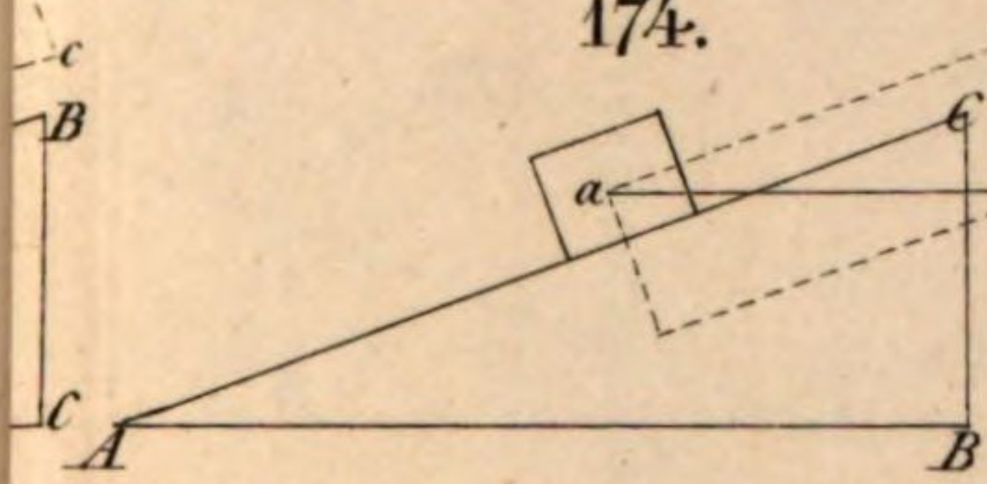
169.



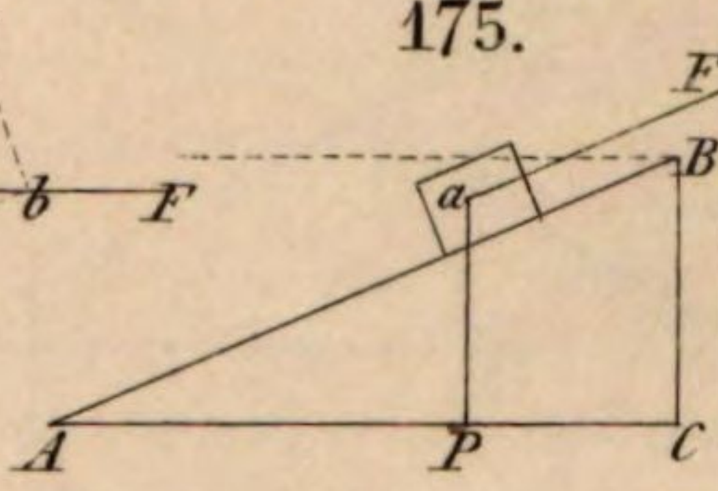
170.



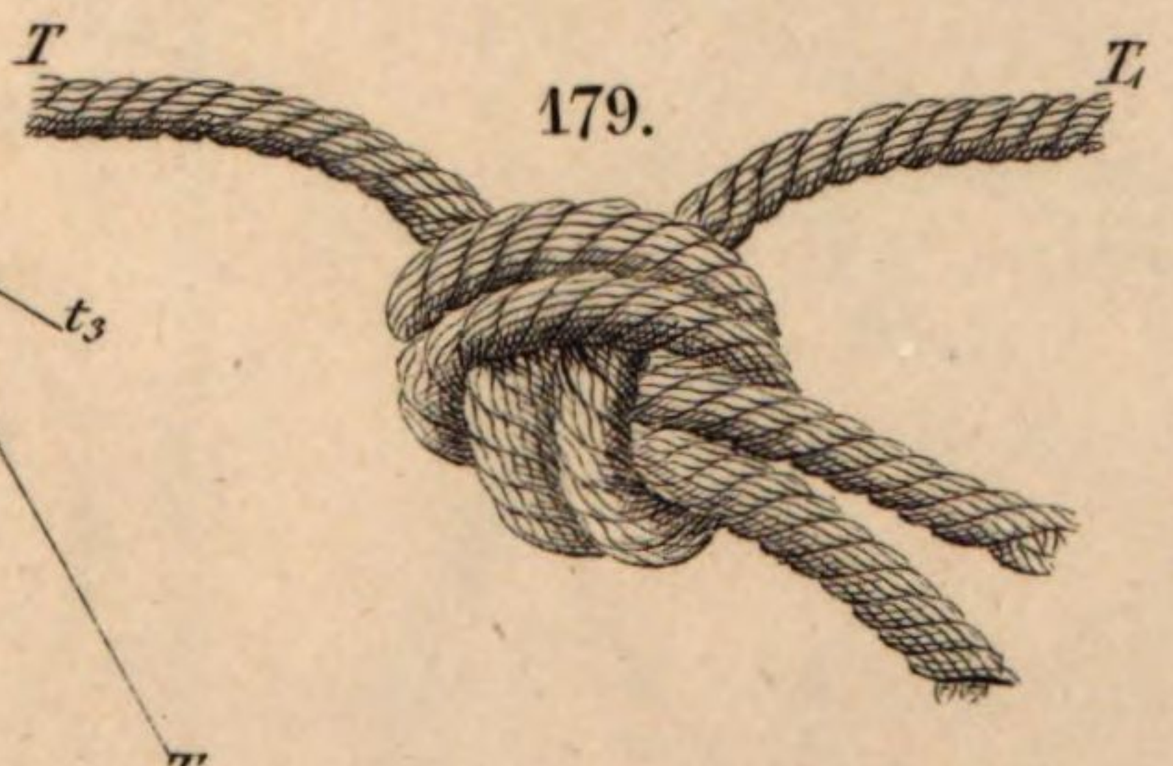
174.

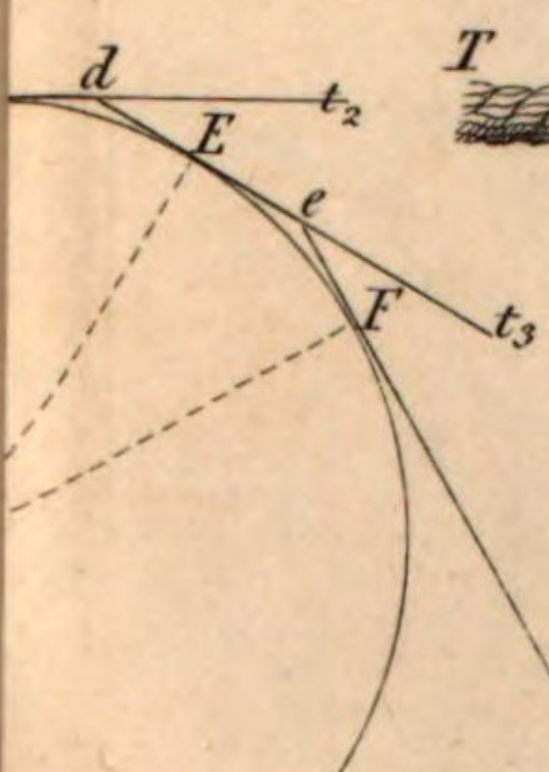


175.



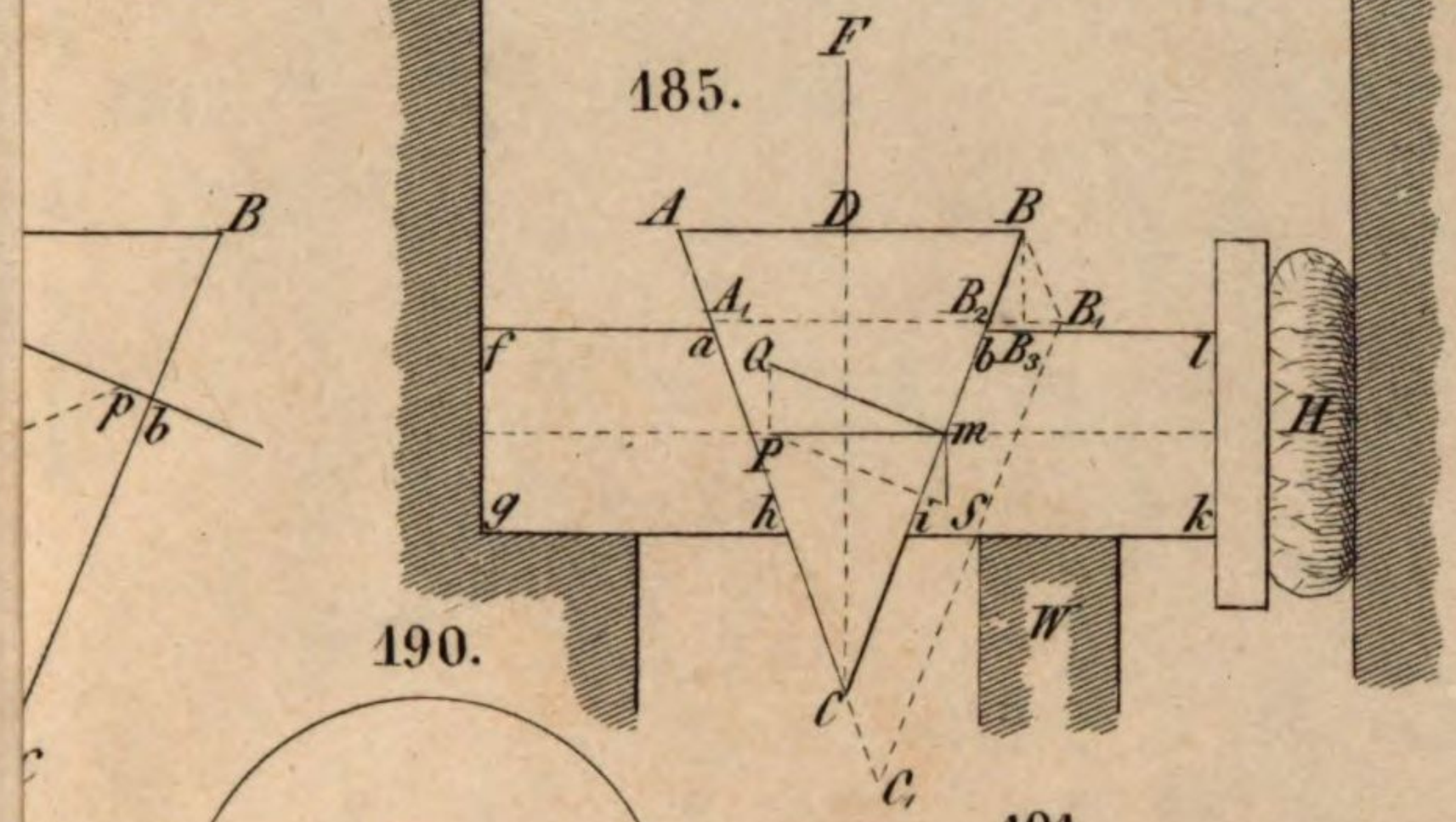
179.



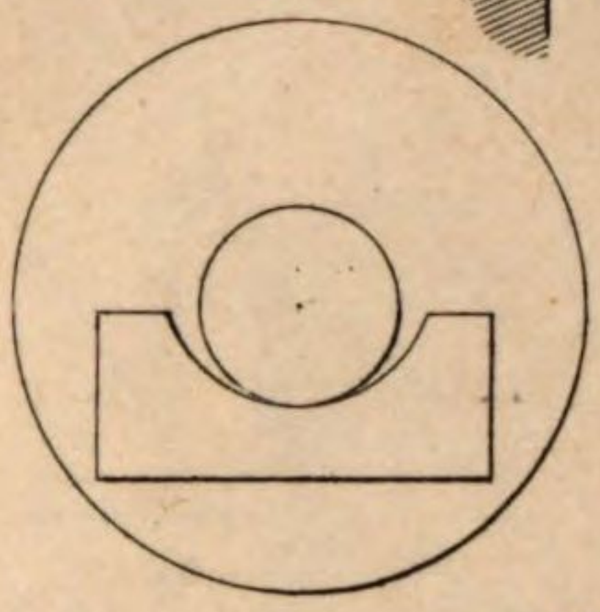


J. A. Bühler sc.

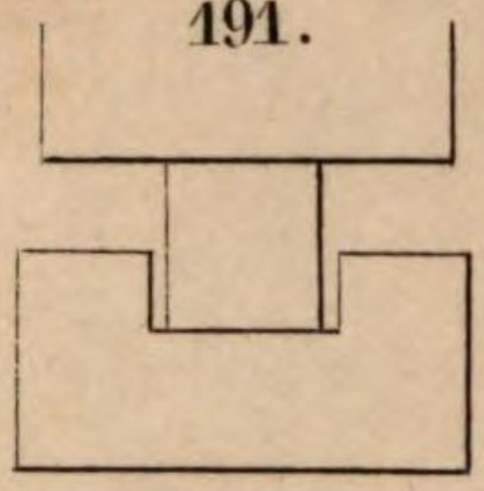
185.



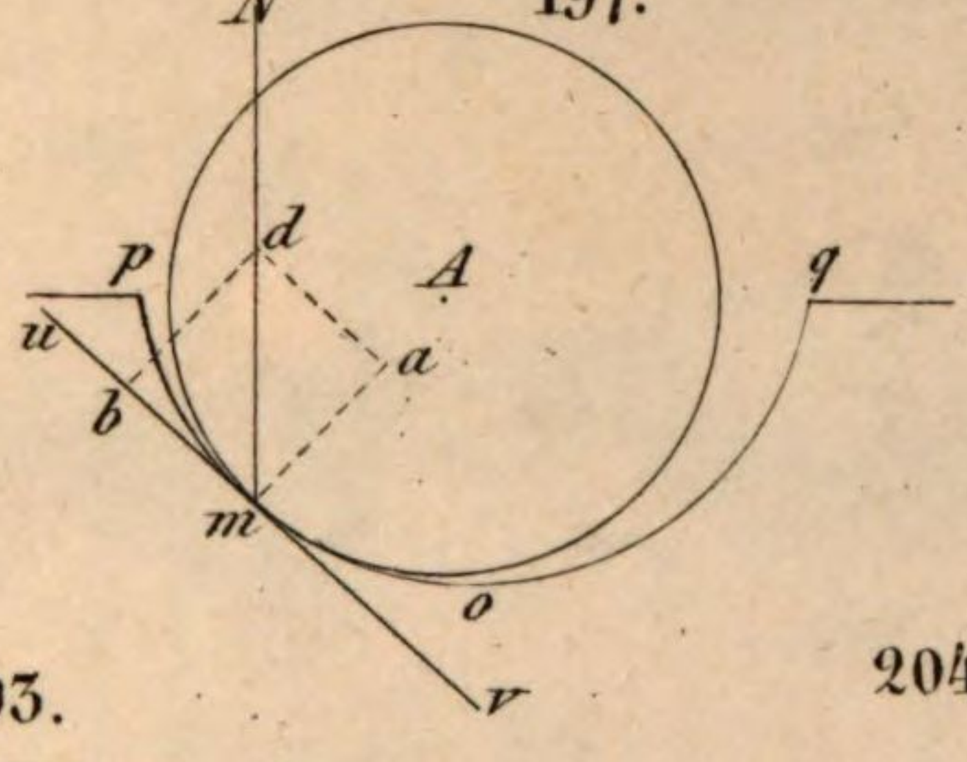
190.



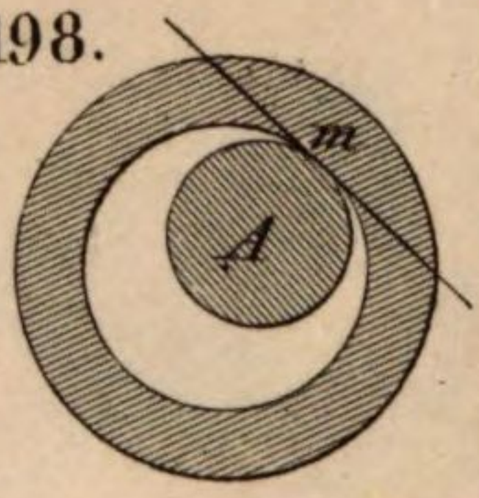
191.



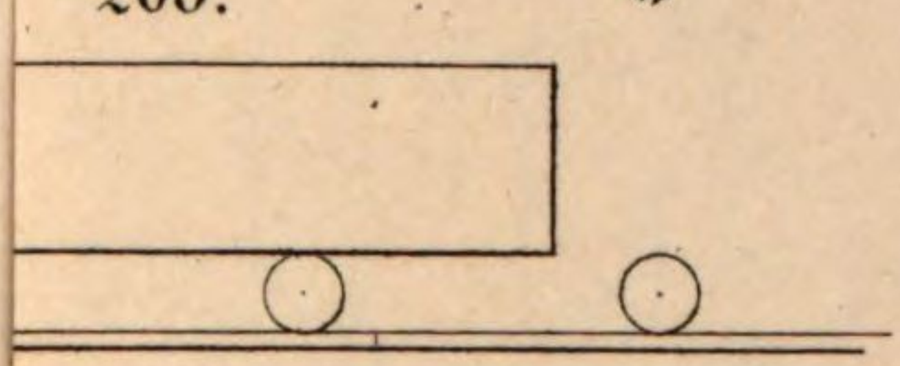
197.



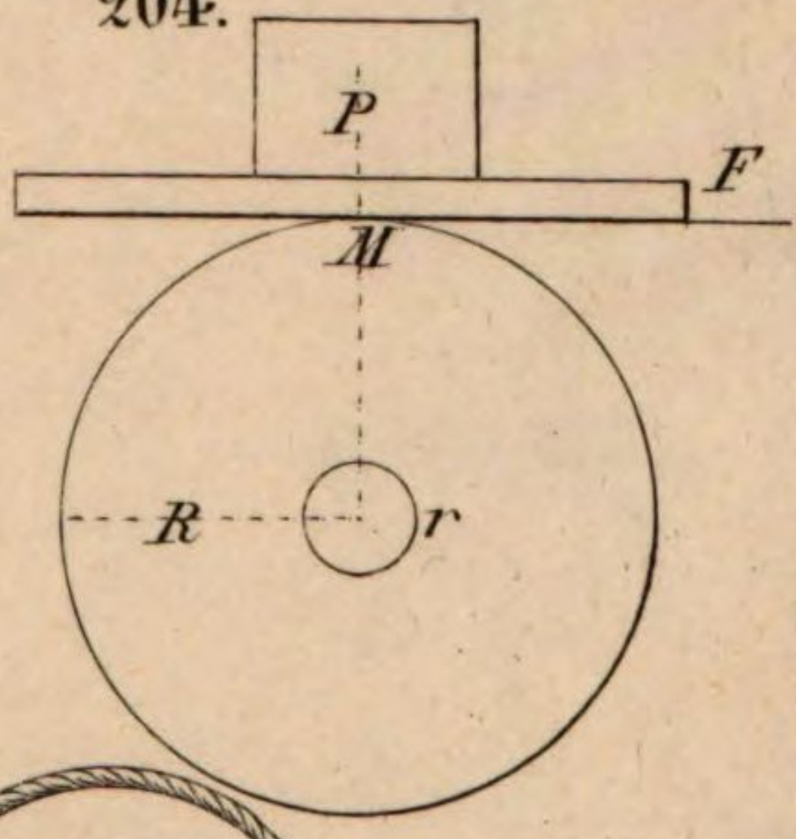
198.



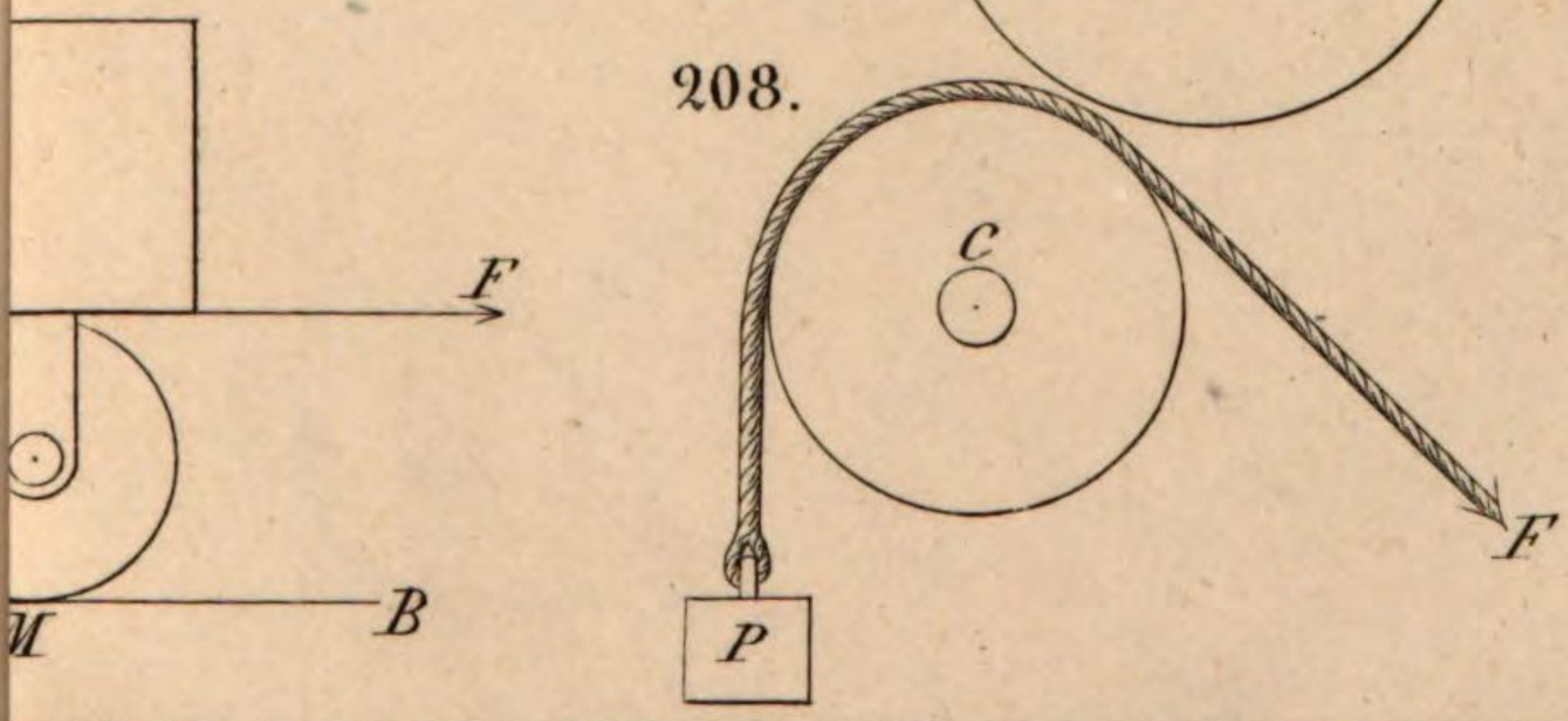
203.



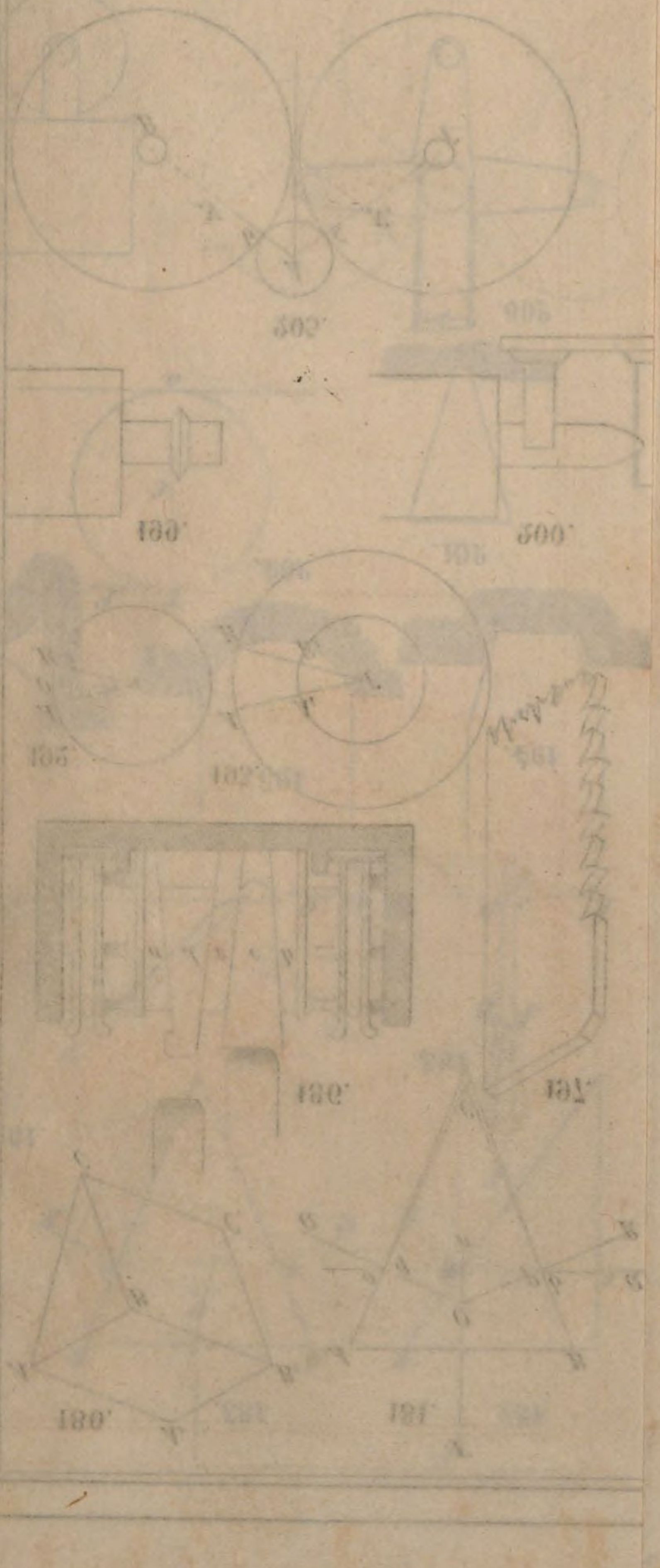
204.



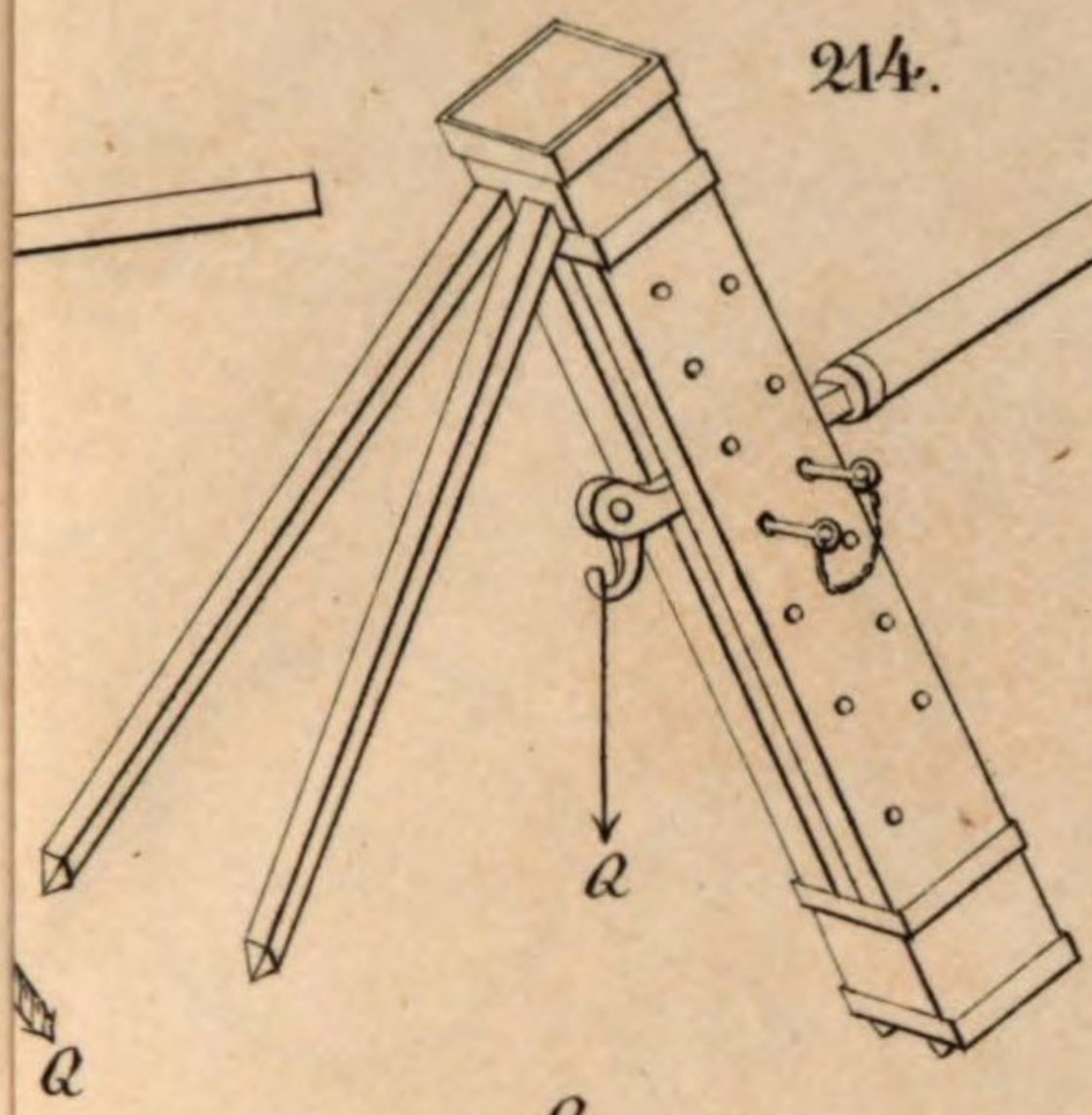
208.



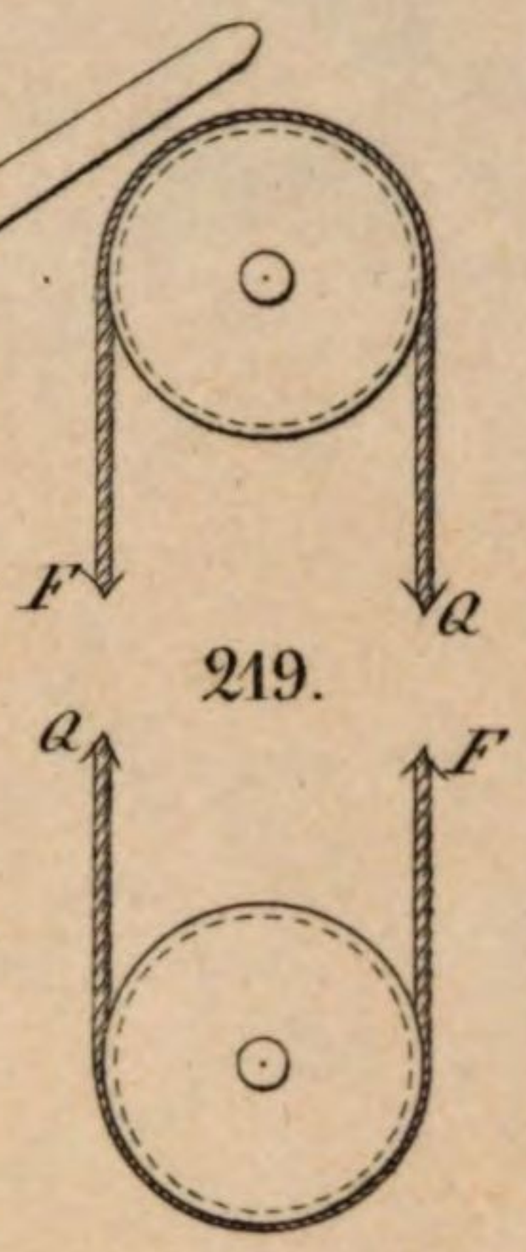
J.A.Bühler sc.Nbg.



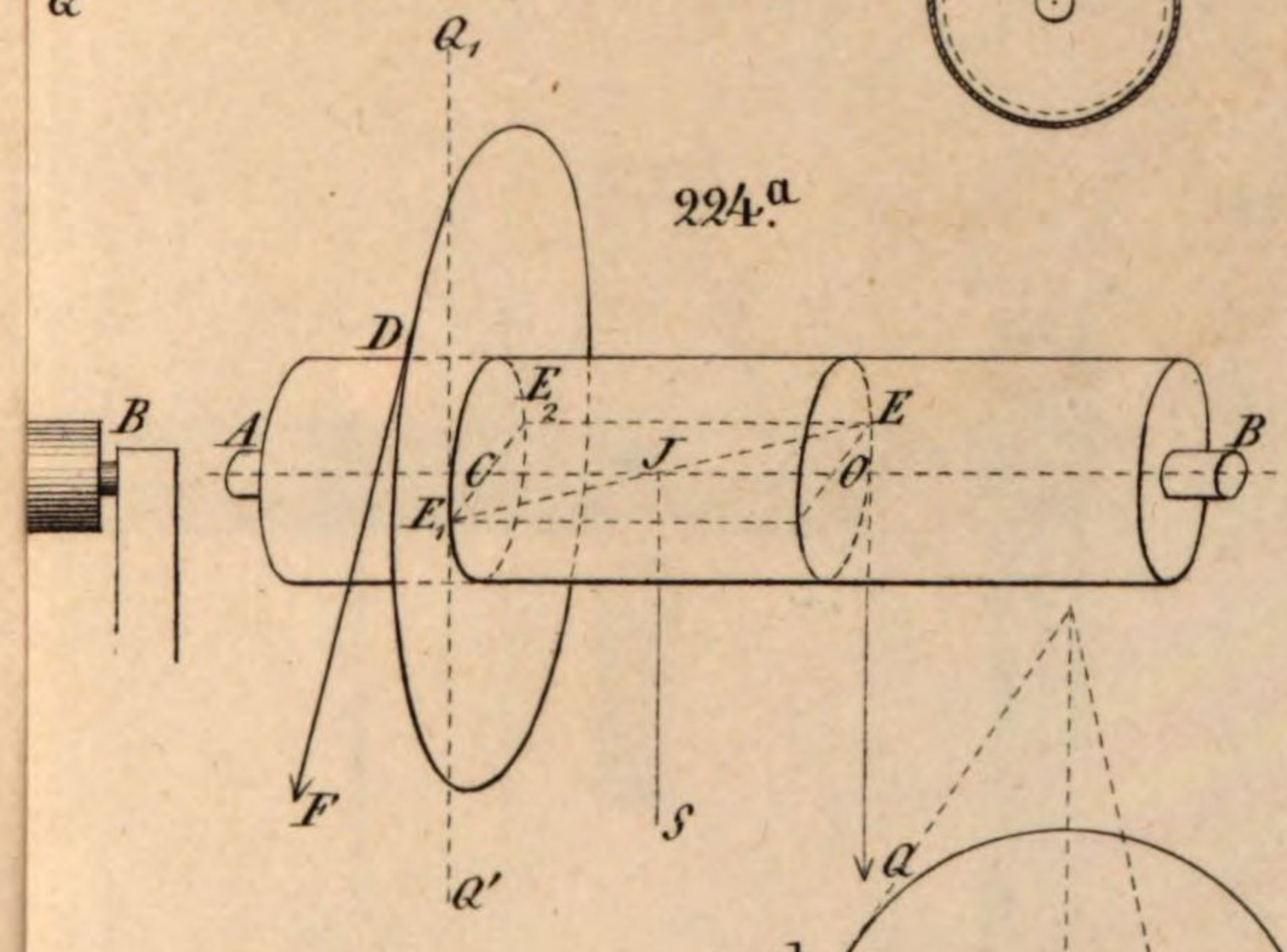
214.



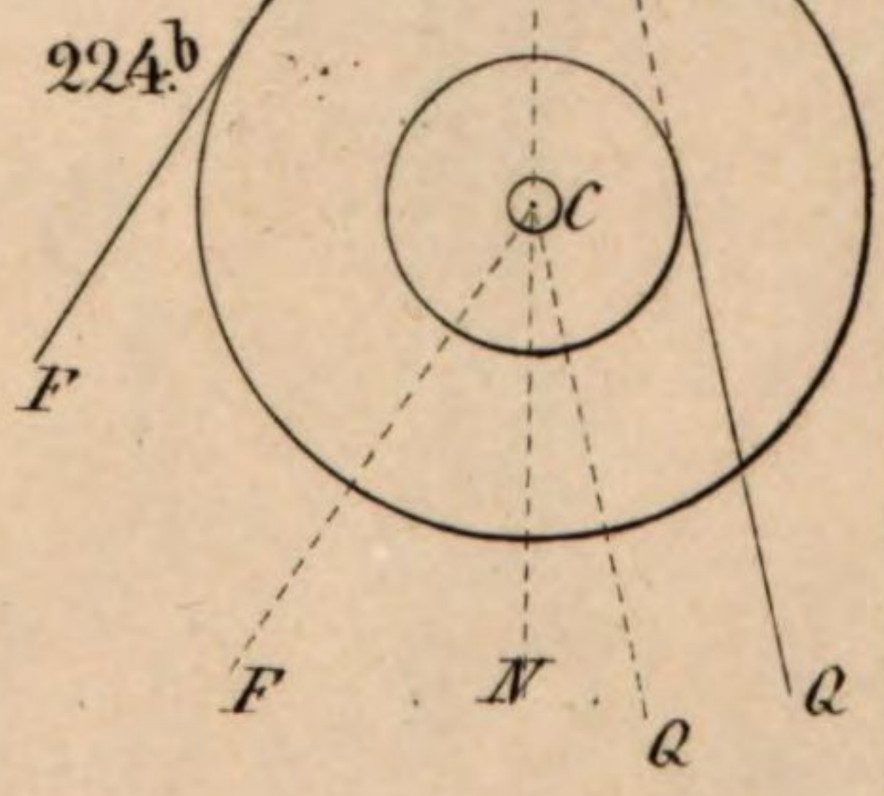
219.



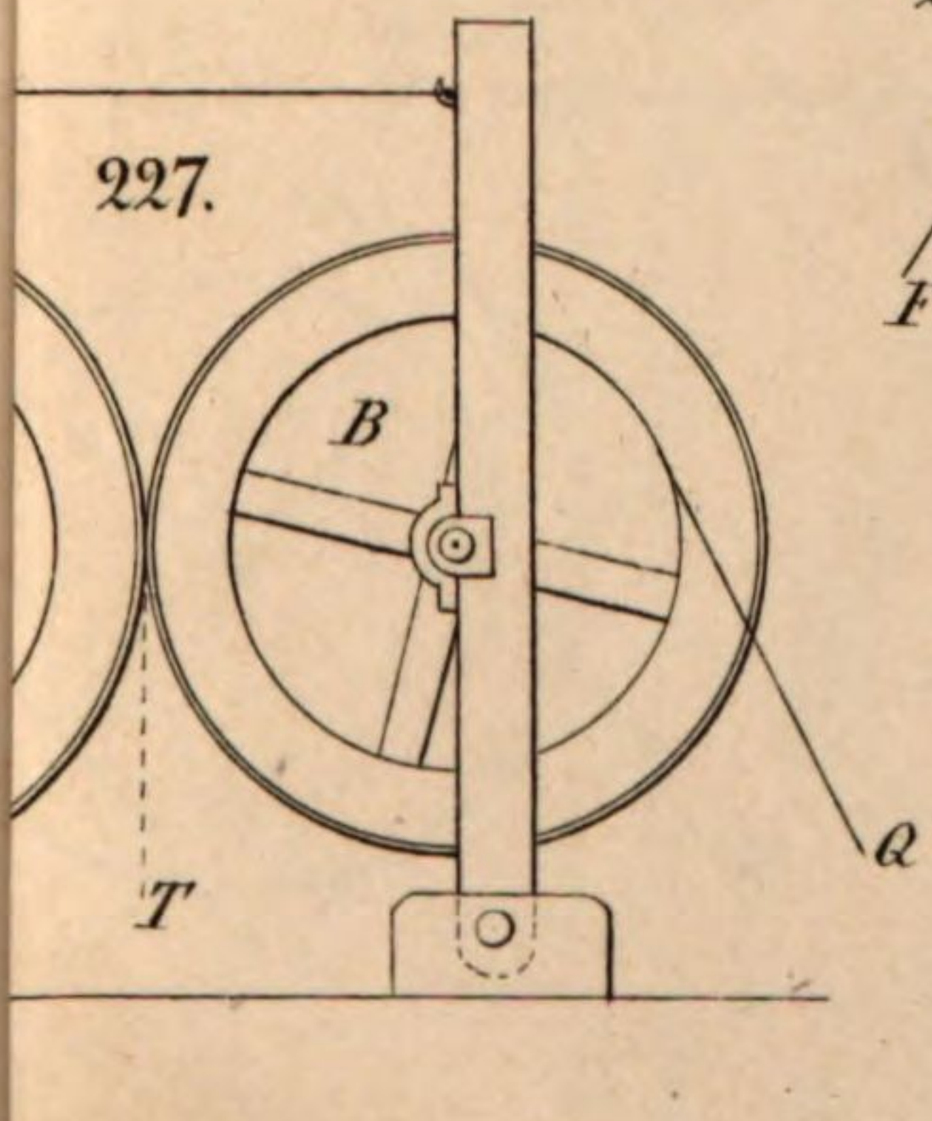
224.a



224.b

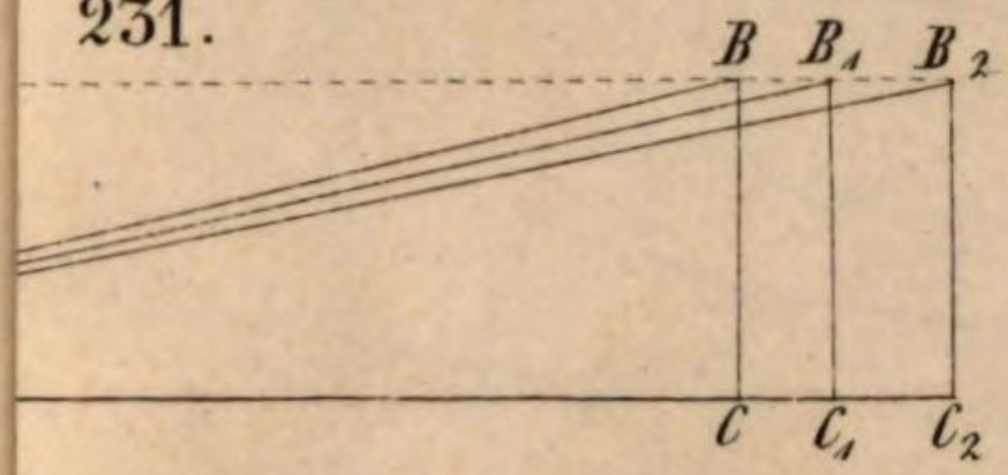


227.

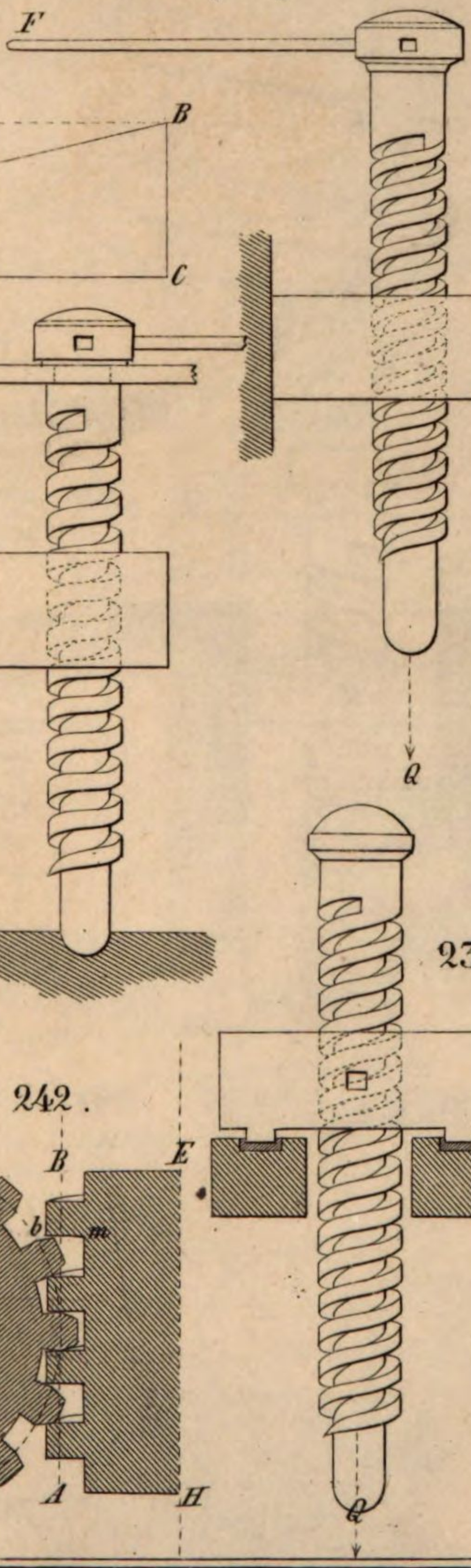


J.A.Bühler sc.Nbg.

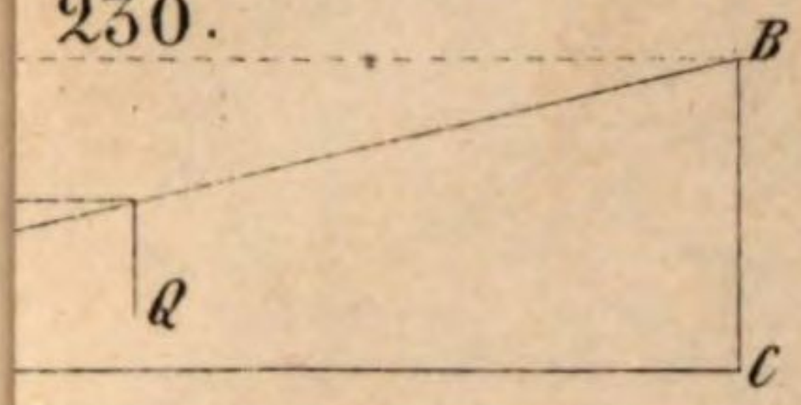
231.



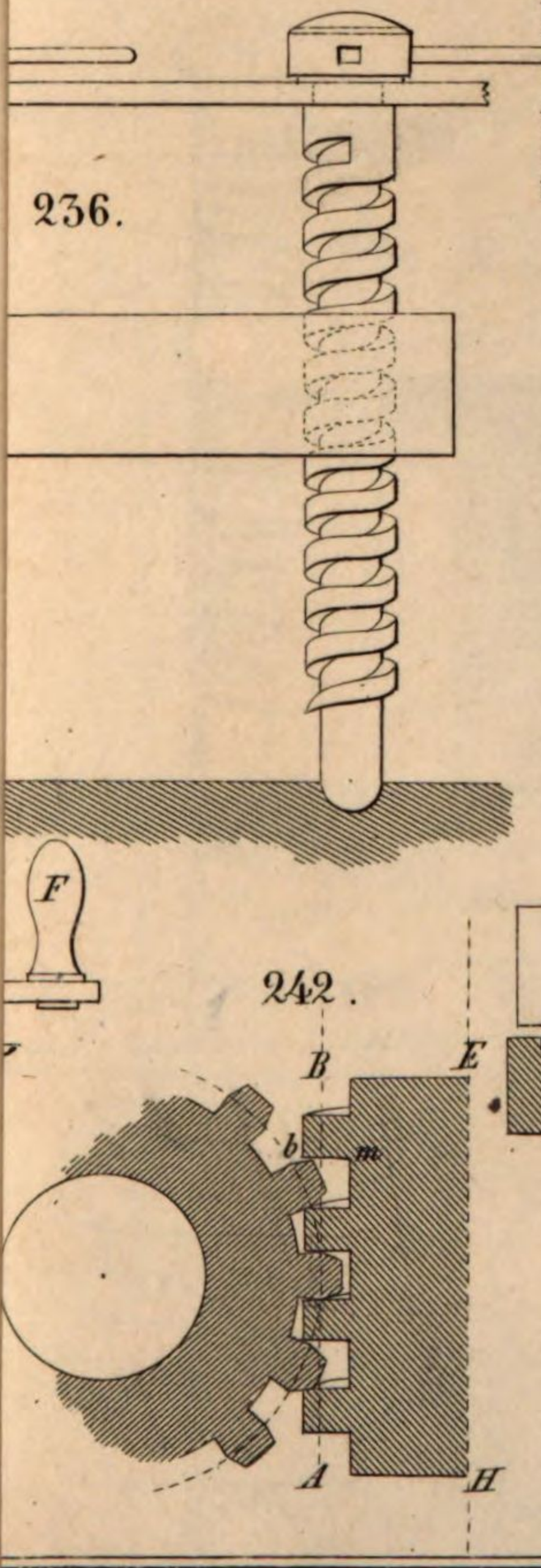
232.

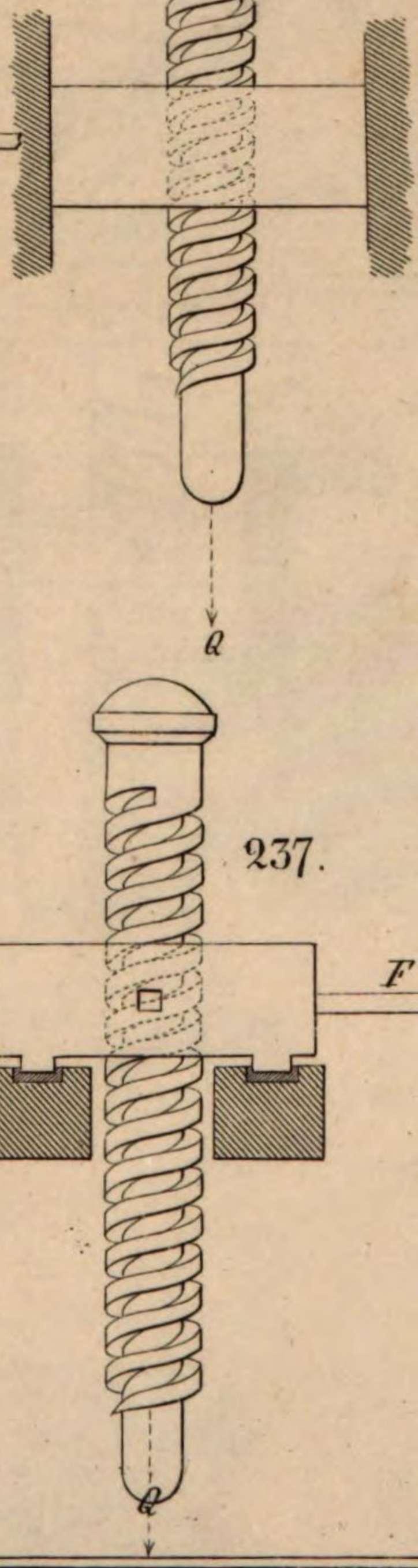


230.

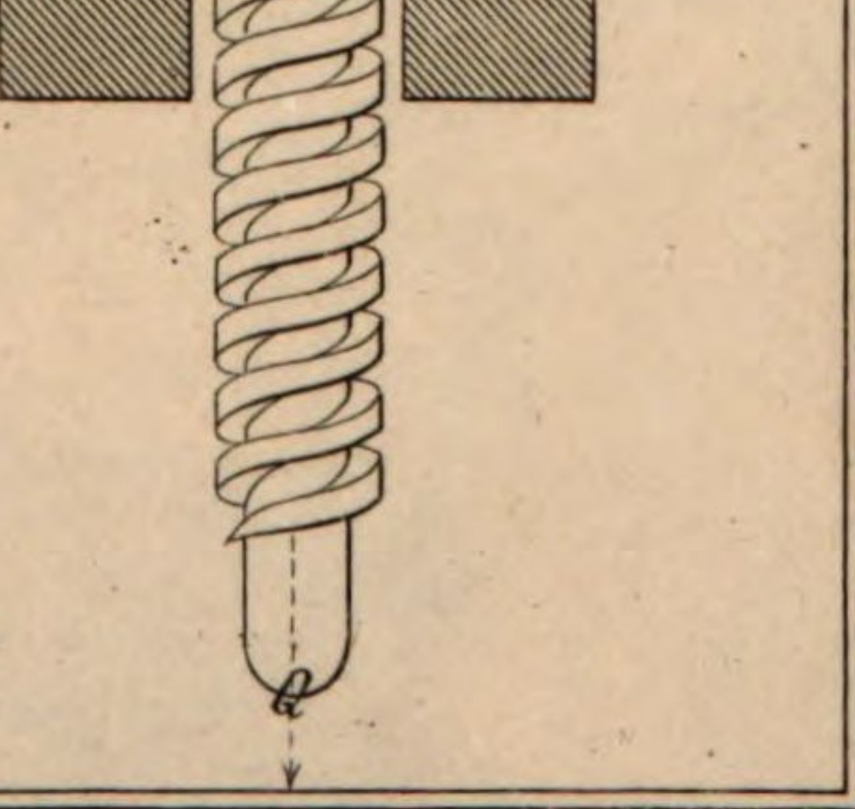


236.





237.



242.

J. A. Bühler sc. Nbg.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Poncelet, Jean Victor,

Industrielle Mechanik

Bd.: 1

Nürnberg 1845
BHS III 74-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708350-4